

Chapitre I

Probabilités conditionnelles et indépendance

Table des matières

I. Probabilités conditionnelles 2

 a. Probabilité conditionnelle de B sachant A2

 b. Tableau à double entrée.....3

II. Arbres pondérés et probabilités totales 3

 a. Arbres pondérés3

 b. Formules des probabilités totales.....4

III. Probabilités et indépendance 5

I. Probabilités conditionnelles

a. Probabilité conditionnelle de B sachant A

Définition :

Soit A et B deux évènements de l'univers Ω , A étant de probabilité non nulle ($P(A) \neq 0$).

La probabilité que l'évènement B soit réalisé sachant que l'évènement A est réalisé, appelée probabilité conditionnelle de B sachant A, est le nombre $P_A(B)$, défini par $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Rappel : $A \cap B$ (intersection) est l'ensemble des issues appartenant à la fois à A et à B.

Ex. :

On lance un dé à 6 faces et on s'intéresse aux deux évènements suivants :

A : « le nombre obtenu est impair ».

B : « Le nombre obtenu est un multiple de 3 ».

Donc $A \cap B$ est l'évènement : « obtenir un nombre à la fois impair et multiple de 3 ». Il n'y a que 3.

On a $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Donc $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriété :

Soit deux évènements A et B tels que $P(A) \neq 0$. Alors :

$$0 \leq P_A(B) \leq 1 \text{ et } P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$

Rappel : $\bar{B}$ est l'évènement contraire de B.

Propriété : Probabilité d'une intersection

Si $P(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Si $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Démonstration :

Ces deux formules se déduisent simplement de la définition de la probabilité conditionnelle.

Rappel :

Probabilité d'une union :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

b. Tableau à double entrée

Un tableau à double entrée permet de déterminer des probabilités conditionnelles. La probabilité de $A \cap B$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la ligne B.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

II. Arbres pondérés et probabilités totales

a. Arbres pondérés

On peut modéliser une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers Ω par un arbre pondéré.

1 ^{er} niveau	2 nd niveau	évènement	probabilité
	$P_A(B)$ B	$A \cap B$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
	$P_A(\bar{B})$ $\bar{B}$	$A \cap \bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$
	$P_{\bar{A}}(B)$ B	$\bar{A} \cap B$	$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$
	$P_{\bar{A}}(\bar{B})$ $\bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$

Propriété : Règle du produit

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Propriété : Règle de la somme

La probabilité d'un évènement s'obtient en effectuant la somme des probabilités de tous les chemins menant à cet évènement.

Méthode : Construction d'un arbre pondéré et calcul de probabilité d'intersection

A l'issue d'une compétition, des cyclistes passent un contrôle anti-dopage.

On estime que 5% des cyclistes sont dopés. On sait aussi, avec le test utilisé, qu'un cycliste dopé est contrôlé positif dans 90% des cas, alors qu'un cycliste non dopé est contrôlé positif dans 8% des cas (faux positif).

On choisit au hasard un des cyclistes de la compétition que l'on soumet au test anti-dopage.

On considère les évènements :

D : « Le sportif choisi est dopé »,

T : « Le sportif choisi a un test positif »,

N : « Le sportif choisi a un test négatif ».

1. Décrire cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
2. En déduire la probabilité de choisir un sportif dopé ayant un test négatif.

Correction :

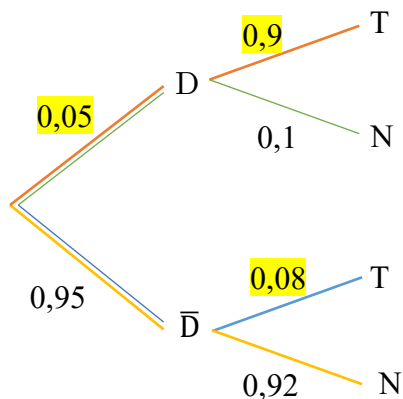
1. La phrase « On estime que 5% des cyclistes sont dopés » donne la probabilité de l'évènement D soit $P(D)=0,05$.

On en déduit que $P(\bar{D})=1-P(D)=1-0,05=0,95$.

De la phrase « qu'un cycliste dopé est contrôlé positif dans 90% des cas », on en déduit $P_D(T)=0,9$.

De la phrase « qu'un cycliste non dopé est contrôlé positif dans 8% des cas », on en déduit $P_{\bar{D}}(T)=0,08$.

2. $P(D \cap N) = P(D) \times P_D(N) = 0,05 \times 0,1 = 0,005$. Soit 0,5% de chances de choisir un sportifs dopés qui aura un test positif.



b. Formules des probabilités totales

Définition : Partition de l'univers

Une partition de l'univers Ω est un ensemble d'évènements deux à deux incompatibles, et dont la réunion est Ω .

Rappel :

Deux évènements sont incompatibles si leur intersection est l'ensemble vide et donc la probabilité de leur intersection est nulle.

Propriété :

On considère $A_1, A_2, \dots, A_n$, n événements de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω .

Pour tout événement B , on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

C'est-à-dire :

$$P(B) = P_B(A_1) \times P(B) + P_B(A_2) \times P(B) + \dots + P_B(A_n) \times P(B)$$

Cas particulier :

A et B étant 2 événements, on a : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Méthode :

Soient A et B deux événements.

On sait que $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,7$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,9$. Calculer $P(B)$.

Correction :

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}) = 0,7 \times 0,4 + 0,9 \times (1 - 0,4) = 0,82.$$

III. Probabilités et indépendance

Dans l'ensemble Ω des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B de probabilité non nulle. Si $P_A(B) = P(B)$, c'est-à-dire que si la réalisation ou non de l'événement A ne modifie pas la probabilité de B , on dit que l'événement B est indépendant de l'événement A .

Propriétés :

- Soit deux événements de probabilité non nulle. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (1) $P_A(B) = P(B)$;
 - (2) $P_B(A) = P(A)$;
 - (3) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
 - Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- ⚠ On n'utilise ces formules que si l'on sait que les événements sont indépendants !!!

Méthode : Étudier l'indépendance de deux événements

Une urne contient 5 bonbons : 3 au chocolat et 2 à la fraise. Tu tires deux bonbons l'un après l'autre sans remise.

Événements :

- A : Le premier bonbon est au chocolat.
- B : Le second bonbon est au chocolat.

On veut savoir si ces évènements sont indépendants...

Correction :

Représentons la situation par un arbre :

On a :

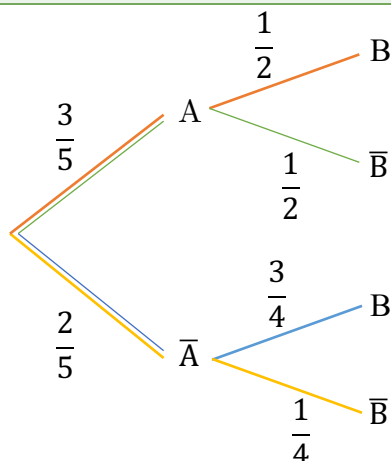
$$p(A) = \frac{3}{5}$$

$$p(B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10} + \frac{6}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$p(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$p(A) \times p(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \neq p(A \cap B)$$

Les évènements ne sont pas indépendants...



Question bonus :

Si on remet la première carte dans le jeu avant de tirer la seconde, les événements deviennent-ils indépendants ?
(Réponse : oui !).