Chapitre III
Produit scalaire – notion et applications

Table des matières

I. Produit scalaire dans le plan

1. Définition

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Il existe trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$ est le **nombre réel** noté $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$ (lire « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ») défini par : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.

Autrement dit :

- $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})}$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$

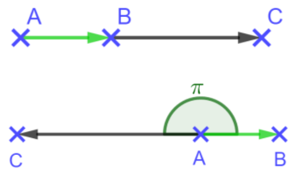
Conséquences : (démonstration orale)

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens, alors :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC}$$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens contraires, alors :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC}$$

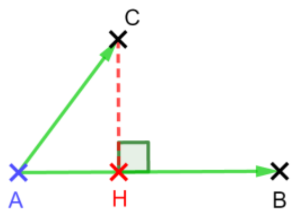


2. Définition avec la projection orthogonale

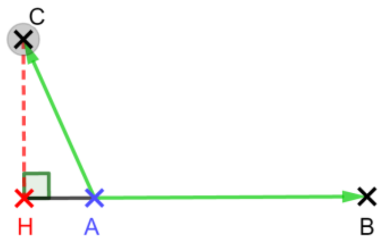
Propriété :

Soit trois points A, B et C avec A et B distincts. Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ *si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ *sont de même sens ;*



- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.



Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

- *Si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont dans le même sens :*

Dans le triangle ACH *rectangle en* H *:*

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AH = AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

En remplaçant dans l'expression précédente :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

- *Si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont de sens contraires :*

Dans le triangle ACH *rectangle en* H *:*

$$\cos(\widehat{CAH}) = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AH = AC \times \cos(\widehat{CAH})$$

Or, $\widehat{CAH} = \pi - \widehat{BAC}$

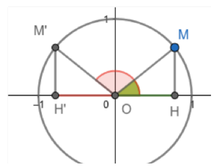
Donc $\cos(\widehat{CAH}) = \cos(\pi - \widehat{BAC}) = -\cos(\widehat{BAC})$

D'où : $AH = -AC \times \cos(\widehat{BAC})$

En remplaçant dans l'expression du début :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$



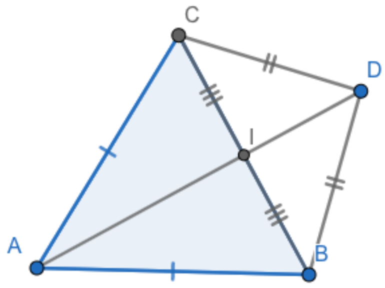
Définition : Carré scalaire

On appelle carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ la quantité $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ et on la note $\overrightarrow{AB}^2$.

On a alors $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

Méthode : Calculer un produit scalaire avec la projection orthogonale
Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB=2 et BCD un triangle isocèle en D tel que BD=$\sqrt{3}$ et D extérieur au triangle ABC. On note I le milieu de [BC].
1. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires en I.
2. Calculer $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$.

Correction :
On obtient la figure ci-contre.



1. A et D sont équidistants de B et de C donc (AD) est la médiatrice de [BC]. (AD) et donc perpendiculaire à [BC] en son milieu I.

2. I est le projeté orthogonal de C sur (AD) et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$sont de même sens.
Donc : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = AD \times AI$
D'après le théorème de Pythagore dans les triangles ACI et CID rectangles en I, $AC^2=AI^2+IC^2$ *et* $CD^2=IC^2+ID^2$.
Donc, $2^2=IA^2+1^2$, *d'où* $IA^2=3$ *et donc* $IA=\sqrt{3}$.
De même, $\sqrt{3}^2=1^2+ID^2$, *d'où* $ID^2=2$ *et donc* $ID=\sqrt{2}$.
$AD=AI+ID=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.
On en déduit : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = AD \times AI = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \times \sqrt{3} = 3+\sqrt{6}$.

3. Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Propriétés :
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

i. $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$: le produit scalaire est dit **symétrique**

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ii.} & (\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda \times (\vec{u}.\vec{v}) \\ \text{iii.} & \vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda \times (\vec{u}.\vec{v}) \\ \text{iv.} & \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w} \\ \text{v.} & (\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w} \end{array}\right\} \text{Le produit scalaire est dit } \textbf{bilinéaire}$$

Méthode : Calculer un produit scalaire avec la bilinéarité et la symétrie
En reprenant la configuration précédente.
Calculer $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BI}$, puis $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BD}$.

Correction :
$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BI} = \left(-\overrightarrow{BI}\right).\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{BI}^2 = -BI^2 = -1$.
$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CI}.\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID}\right) = \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{ID}$ *par bilinéarité.*
Or, $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{ID} = 0$ *car* $\cos\left(\widehat{CID}\right) = \cos(90°) = 0$.
Donc, $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BI} = -1$.

II. Propriétés du produit scalaire

1. Identités remarquables

Propriétés :
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Démonstration de la première identité :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$$
$$= \vec{u}^2+\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$

2. Caractérisation de l'orthogonalité avec le produit scalaire

Définition :

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ sont **orthogonaux** signifie que les droites (AB) et (AC) sont **perpendiculaires**.

Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

Propriété : Nullité du produit scalaire

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$

Dans ce cas, on note $\vec{u}\perp\vec{v}$.

On peut aussi noter cette formule : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$.

Démonstration :

évidente si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul. Sinon :

Supposons que ni $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient nuls :

$\Longrightarrow$: *remplacer dans la formule du I.1. : $\widehat{BAC}$ par $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$...*

$\Leftarrow$: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times cos(\widehat{BAC})=0$

implique $cos(\vec{u};\vec{v})=0=cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Ainsi l'angle formé par $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ est droit.

3. Expression analytique du produit scalaire

Propriété : Dans un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$, on a :

$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$$
$$\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$$

Méthode : Montrer que 2 droites sont perpendiculaires.

Soit les points A(1 ;1), B(3 ;2), C(-2 ;2) et D(1 ;-4).

Montrer que (AB) est perpendiculaire à (CD).

Correction :

On va calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, puis calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ pour vérifier qu'il vaut bien 0.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1-(-2)\\-4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=2\times3+1\times(-6)=6-6=0$$

Le produit scalaire est nul, les droites (AB) et (CD) sont bien perpendiculaires.

III. Applications du produit scalaire

1. Calcul avec des normes

Propriété :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

Démonstration :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$$
$$= \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

On en déduit donc que

$$2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Puis :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

A vous de jouer : démontrer la fin de l'égalité…

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \cdots$$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Démonstration : (en utilisant la formule précédente)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Application : Nous pouvons calculer un produit scalaire dans un triangle en connaissant les 3 côtés.

2. Formule d'Al-Kashi

On considère un triangle ABC dont les côtés sont a=BC, b=AC et c=AB.

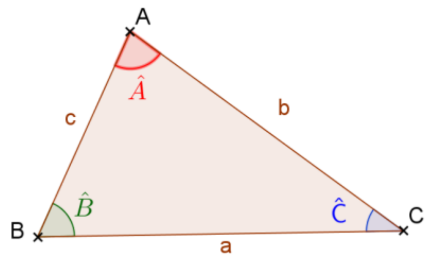
Propriété :

Pour tout triangle ABC :

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\hat{A}}$$

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos\hat{B}}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\hat{C}}$$



Démonstration :

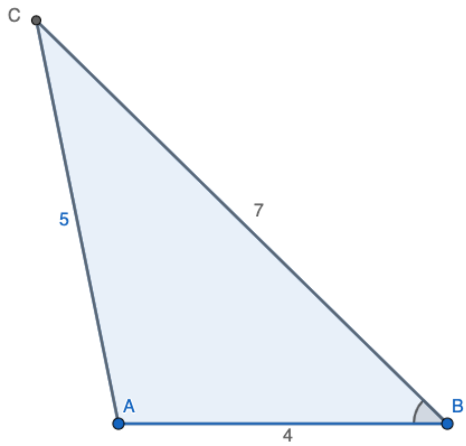
$$a^2 = BC^2 = \left(\overrightarrow{BC}\right)^2$$
$$= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$$
$$= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$$
$$= \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \left(-2\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AC}$$
$$= \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \mathrm{BA}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos(\widehat{\mathrm{A}})$$
$$= \mathrm{c}^2 + \mathrm{b}^2 - 2\mathrm{bc}\cos\hat{\mathrm{A}}$$
$$= \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 - 2\mathrm{bc}\cos\hat{\mathrm{A}}$$

En permutant les lettres a, b et c, *on démontre les 2 autres égalités.*

Application : Grâce à cette formule, nous pouvons calculer les angles dans tous les types de triangle en connaissant les 3 côtés.

Méthode :



Soit ABC un triangle tel que AB=4, AC=5 et BC=7.

Calculer $\widehat{ABC}$.

Correction:

Nous allons appliquer Al-Kashi dans ABC:

Nous cherchons l'angle $\widehat{ABC}$, nous allons choisir la

Formule avec le côté en face de cet angle à gauche.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$

$5^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \times \cos(\widehat{ABC})$

$25 = 16 + 49 - 56 \times \cos(\widehat{ABC})$

$25 = 65 - 56 \times \cos(\widehat{ABC})$

$25 - 65 = -56 \times \cos(\widehat{ABC})$

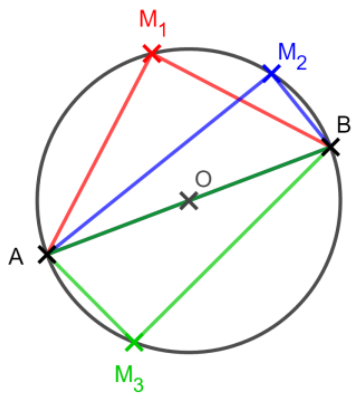
$-40 = -56 \times \cos(\widehat{ABC})$

$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{-40}{-56} = \frac{5}{7}$ $\qquad$ $\widehat{ABC} = Arccos\left(\frac{5}{7}\right) \approx 44°$

3. Transformation de l'expression $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}}$

Propriété :

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$



Démonstration :

Soit O milieu de [AB].

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

$or, OA = OB = \frac{1}{2}\mathrm{BA}$ et $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de sens contraires donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\mathrm{BA} \times \frac{1}{2}\mathrm{BA} = -\frac{1}{4}BA^2$

$\Leftrightarrow MO^2 - \frac{1}{4}BA^2 + \overrightarrow{MO}.\left(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}_{\vec{0}}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow MO^2 - \frac{1}{4}BA^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{1}{4}BA^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{MO^2} = \sqrt{\frac{1}{4}BA^2} \quad cf. MO \text{ et } BA \text{ sont des longueurs}$$

$$\Leftrightarrow MO = \frac{1}{2}BA$$

Autre façon de le dire :

Propriété :

Tout triangle rectangle est inscriptible dans un cercle de diamètre l'hypoténuse.

IV. Produit scalaire dans un repère (rappel)

Propriétés (coordonnées d'un vecteur) :
Pour tous point A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$.

Propriété (norme d'un vecteur ou longueur d'un segment) :
Soient, dans une base orthonormée $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, le vecteur $\vec{u}\,(x\,;y\,)$, les points A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B).
La norme (longueur) de vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Propriété (milieu d'un segment) :
Soit, dans un repère, les points A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B).
Les coordonnées du milieu du segment [AB] sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Propriété (colinéarité):
Soit, dans une base, les vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y\,)\ et\ \vec{v}\,(x'\,;y'\,)$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy'-x'y=0$.