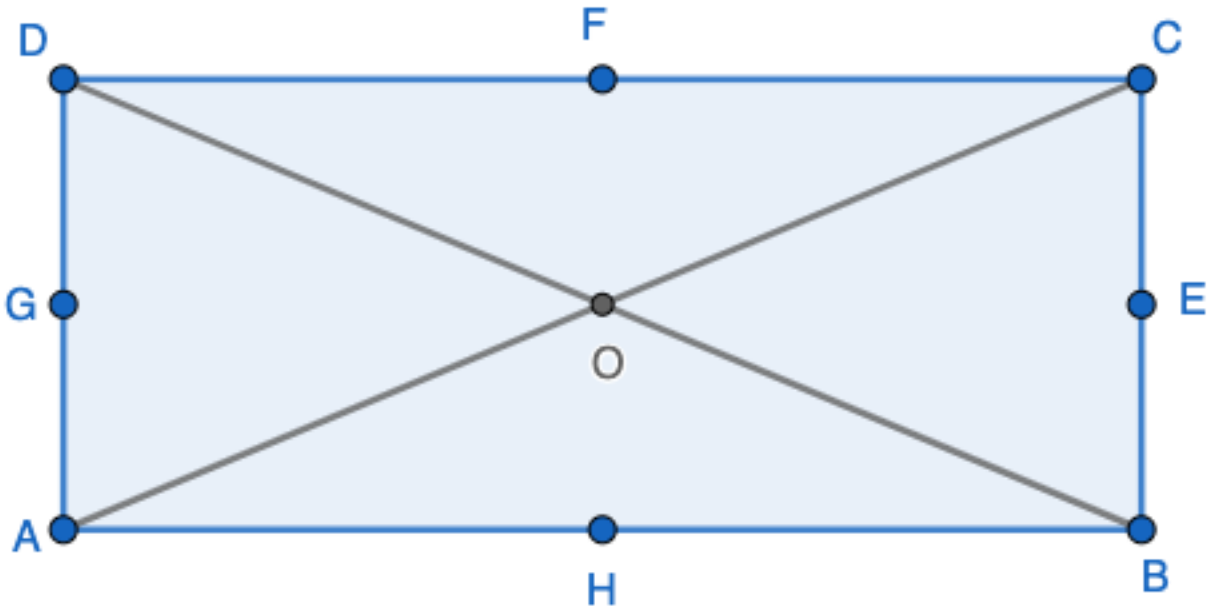
Fiche d'exercices 1 – Vecteurs et produit scalaire

Correction :

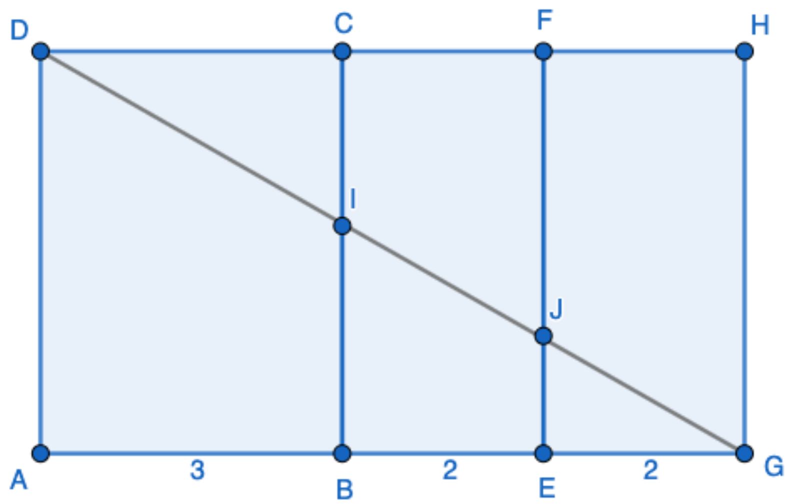
Exercice 1 : avec le projeté orthogonal



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$	*	*	$AB \times AH$
$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AF}$	*	*	$AD \times AD = AD^2$
$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB}$	*	*	$AG \times AD$
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AF}$	*	*	$AB \times AB = AB^2$

Pour $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$*, le projeté orthogonal de* C *sur* (AB) *est* B*, donc* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AB$.
Pour $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AF}$*, le projeté orthogonal de* F *sur* (AG) *est* D*. D'où,* $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AF} = AG \times AD$.
Pour $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB}$*, le projeté orthogonal de* B *sur* (AF) *ne figure pas sur la figure, mais nous savons que* $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$ *est le projeté de* F *sur* (AB) *est* H*. D'où,* $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF} = AB \times AH$.
Pour $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AF}$*, le projeté orthogonal de* F *sur* (AB) *est* D*. On a donc* $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AF} = AD \times AD$.

Exercice 2 : avec le projeté orthogonal



1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 3^2 = 9$ *car Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B et vecteurs de même sens.*

2. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BF} = -BA \times BE = -3 \times 2 = -6$ *car E est le projeté orthogonal de F sur (BA) et* $\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{BF}$ *sont de sens contraires..*

3. $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EI} = -AG \times EB = -7 \times 2 = -14$ *car E est sur (AG), le projeté orthogonal de I sur (AG) est B, et* $\overrightarrow{AG}$ *et* $\overrightarrow{EI}$ *sont de sens contraires.*

On peut aussi utiliser les propriétés calculatoires du produit scalaire :

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AG}.\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI}\right) = \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AI} = -7 \times 5 + 7 \times 3 = -35 + 21 = -14.$

4. $\overrightarrow{GJ}.\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GJ} = GB \times GE = 4 \times 2 = 8$*. Car le projeté orthogonal de J sur (GB) est E (et vecteurs de même sens).*

5. $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{HG} = -IC \times HG$*. Car* $\overrightarrow{IC}$ *et* $\overrightarrow{HG}$ *sont colinéaires de sens contraires.*

Pour trouver IC, un petit Thalès :

On a :

- *D,C, H et D, I, G alignés dans le même ordre ;*
- *(CI) et (HG) sont parallèles.*

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{DC}{DH} = \frac{DI}{DG} = \frac{CI}{HG}$$
$$\frac{3}{7} = \frac{DI}{DG} = \frac{CI}{4}$$

D'où : $CI = \frac{3\times 4}{7} = \frac{12}{7}$.

Ainsi, $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{HG} = -IC \times HG = -\frac{12}{7} \times 4 = -\frac{48}{7}$.

6. $\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{EA} = 0$ *car* $\overrightarrow{EJ}$ *et* $\overrightarrow{EA}$ *sont orthogonaux.*

Exercice 3 : Opérations avec le produit scalaire

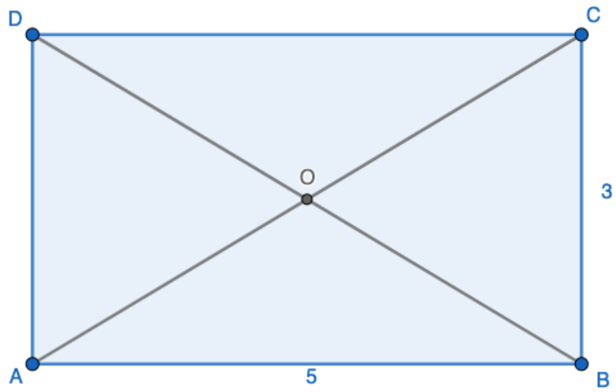
Sachant que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 2$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} = -4$, $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CD} = 2$ *et que* $\overrightarrow{DE}$ *et* $\overrightarrow{EF}$ *sont orthogonaux, en développant les produits scalaires suivants si besoin, trouver leurs valeurs.*

1. $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{EF} = 0$ *car* $\overrightarrow{DE}$ *et* $\overrightarrow{EF}$ *sont orthogonaux.*

2. $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} = 2 - 4 = -2$.

3. $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\right).\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{EF} = 2 - 4 + 2 + 0 = 0$.

Exercice 4 : Bilinéarité et produit scalaire guidé



On considère le rectangle ABCD tel que AB=5 et BC=3. On note O l'intersection des diagonales du rectangle.

1. On peut écrire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Faire de même avec $\overrightarrow{BD}$ *et l'exprimer comme une somme de 2 vecteurs.*

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

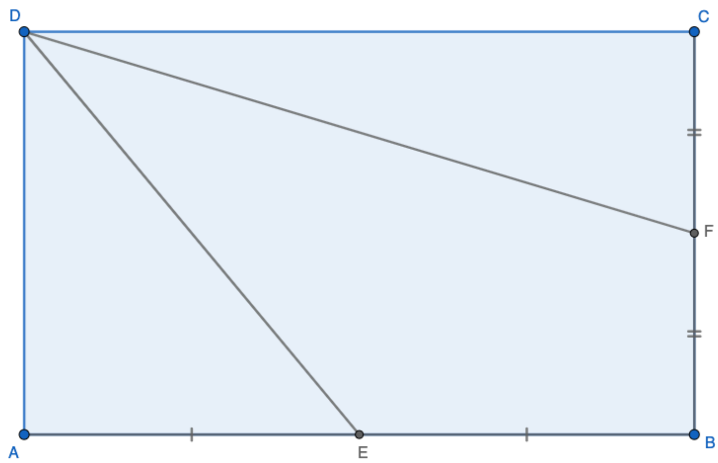
2. En remplaçant $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BD}$ *par la somme trouvée dans la 1. calculer* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} =$$

$$0 + -\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BC}\right)^2 + 0 = -AB^2 + BC^2 = -25 + 9 = -16$$

Les « 0 » proviennent de vecteurs orthogonaux.

Exercice 5 : Synthèse des méthodes



On considère le rectangle ABCD de longueur 10 et de largeur 6. E est le milieu du côté [AB] et F le milieu du côté [BC]. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} = DA \times DA = 36$.

2. $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} = DC \times DC = 100$

3. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0$.

4. $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} = \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}\right).\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}\right) = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CF} =$

$0 + DA \times CF + AE \times DC + 0 = 6 \times 3 + 5 \times 10 = 18 + 50 = 68$.

Ici, la décomposition en somme de vecteurs orthogonaux nous simplifie grandement la tâche…

5. $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}).(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CB} =$

$$DC^2 + 0 + 0 + CF \times CB = 100 + 3 \times 6 = 118$$

Attention pour la simplification aux vecteurs orthogonaux, ainsi, que si les vecteurs sont colinéaires, à leur sens respectif !