Fiche d'exercices 2 – Vecteurs et produit scalaire
coordonnées et orthogonalité

Correction :

Exercice 1 : Calcul de produit scalaire avec coordonnées

On va ici appliquer les formules suivantes :

Dans un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ *et* $\vec{v}\binom{x'}{y'}$, *on a :*

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$
$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

$\vec{u}\binom{1-\sqrt{2}}{1}$ *et* $\vec{v}\binom{1+\sqrt{2}}{-4}$.

Calculer :

1. $\vec{u}.\vec{v} = (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) + 1 \times (-4) = 1^2 - \sqrt{2}^2 - 4 = 1 - 2 - 4 = -5.$

En surligner il s'agit d'une identité remarquable…

2. $(3\vec{u}).\vec{v} = 3 \times \vec{u}.\vec{v} = 3 \times (-5) = -15.$

3. $(4\vec{u}).(-2\vec{v}) = 4 \times (-2) \times \vec{u}.\vec{v} = -8 \times \vec{u}.\vec{v} = -8 \times (-5) = 40.$

4. $\vec{u}.(\sqrt{2}\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\sqrt{2}\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} = \sqrt{2} \times \|\vec{u}\|^2 - (-5) = \sqrt{2} \times \left((1-\sqrt{2})^2 + 1^2\right) + 5$

$$= \sqrt{2} \times \left(1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + 1^2\right) + 5 = \sqrt{2} \times (1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1) + 5$$
$$= \sqrt{2} \times (4 - 2\sqrt{2}) + 5 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}^2 + 5 = 4\sqrt{2} - 2 \times 2 + 5 = 4\sqrt{2} - 4 + 5 = 4\sqrt{2} + 1$$

Exercice 2 : orthogonalité et coordonnées

Déterminer les éventuelles valeurs du réel x pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux il suffit que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

1. $\vec{u}\binom{6}{x}$ *et* $\vec{v}\binom{-3}{2}$

$$\vec{u}.\vec{v} = 6 \times (-3) + x \times 2 = -18 + 2x = 0$$

On résout cette équation :

$$-18 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{18}{2} = 9$$

2. $\vec{u}\binom{-3}{x}$ *et* $\vec{v}\binom{x-1}{4}$

$$\vec{u}.\vec{v} = -3 \times (x-1) + x \times 4 = -3x + 3 + 4x = x + 3 = 0$$

On résout cette équation :

$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

3. $\vec{u}\binom{3}{8}$ *et* $\vec{v}\binom{x}{-2}$

$$\vec{u}.\vec{v} = 3 \times x + 8 \times (-2) = 3x - 16 = 0$$

On résout cette équation :

$$3x - 16 = 0 \Leftrightarrow 3x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{3}$$

4. $\vec{u}\binom{x}{-2}$ *et* $\vec{v}\binom{x}{8}$

$$\vec{u}.\vec{v} = x \times x + (-2) \times 8 = x^2 - 16 = 0$$

On résout cette équation :

$$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -\sqrt{16}\ et\ x = \sqrt{16} \Leftrightarrow x = -4\ et\ x = 4$$

Exercice 3 : orthogonalité, coordonnées et prise d'initiative

$A(-10;\,4)$, $B(-4;\,1)$ *et* $C(-1;\,7)$.

1. En utilisant le produit scalaire, montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

On va calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *puis calculer des produits scalaires avec ces 3 vecteurs afin de trouver lequel est nul.*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4-(-10)\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-(-10)\\7-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-(-4)\\7-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

En regardant les coordonnées, on voit qu'il y a de fortes chances que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$. *Vérifions :*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=6\times 3+(-3)\times 6=18-18=0$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont orthogonaux, ABC est donc rectangle en B.*

2. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

Comme ABC est un triangle rectangle en B, pour que ABCD soit un rectangle, il suffit que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Posons que D $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$ *sont* $\begin{pmatrix}-1-x\\7-y\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-x\\7-y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}6=-1-x\\-3=7-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7\\y=10\end{cases}$$

Les coordonnées de D sont : $\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$.

Exercice 4 : produit scalaire et identités remarquables

Des formules :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

On déduit :

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2}$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2}$

On considère les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *tels que* $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=6$ *et* $\vec{u}.\vec{v}=2$.

Calculer les expressions suivantes :

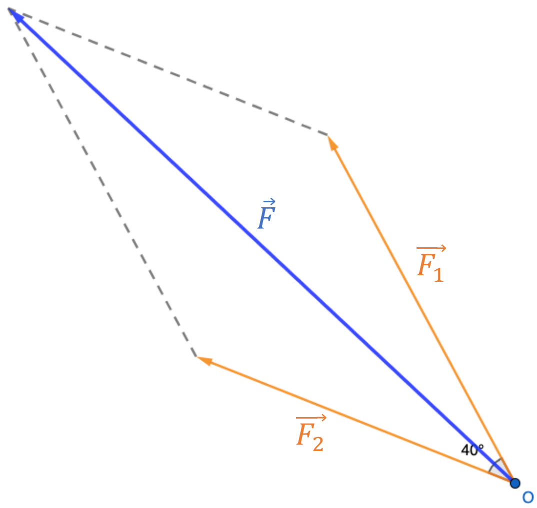
1. $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2}=\sqrt{4^2-2\times 2+6^2}=\sqrt{16-4+36}=\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}$
$=\sqrt{16}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

2. $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2}=\sqrt{4^2+2\times 2+6^2}=\sqrt{16+4+36}=\sqrt{56}=\sqrt{4\times 14}$
$=\sqrt{4}\times\sqrt{14}=2\sqrt{14}$

3. $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=4^2-6^2=16-36=-20$

4. $(\vec{u}+2\vec{v}).(3\vec{u}+\vec{v})=3\vec{u}^2+\vec{u}.\vec{v}+6\vec{u}.\vec{v}+2\vec{v}^2=3\times 4^2+2+6\times 2+2\times 6^2=134$

Exercice 5 : produit scalaire et identités remarquables



1. Quel est le lien entre $\vec{F}$, $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$.

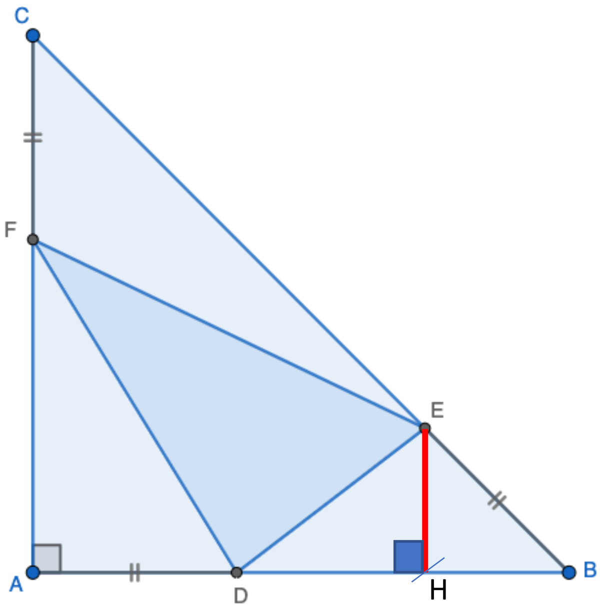
On voit que $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.

2. Sachant que $F_1 = 15\,N$, $F_2 = 13\,N$ et que l'angle $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 40°$, déterminer l'intensité de la résultante $\|\vec{F}\|$. Arrondir le résultat au dixième.

$$\|\vec{F}\| = \|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{F_1}\|^2 + 2\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2} + \|\overrightarrow{F_2}\|^2} = \sqrt{15^2 + 2(\|\overrightarrow{F_1}\| \times \|\overrightarrow{F_2}\| \times \cos\left((\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2})\right)) + 13^2}$$
$$= \sqrt{225 + 2 \times (15 \times 13 \times \cos(40°)) + 169} \approx 26{,}3$$

Exercice 6 : Prise d'initiative – avec un repère que vous posez

Le corrigé va suivre l'énoncé de l'aide



Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB=AC=1.
Les points D, E et F sont placés sur les segments [AB], [BC] et [CA] tels que AD=BE=CF=k, avec $k \in [0; 1]$.
Existe-t-il des valeur de k telle que le triangle DEF soit rectangle en D.

1. Déterminer en fonction de k les coordonnées des différents points de la figure dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
$A\binom{0}{0}$, $B\binom{1}{0}$, $C\binom{0}{1}$, $D\binom{k}{0}$, $F\binom{0}{1-k}$.
Pour E, il va falloir faire quelques calculs.
ABC est un triangle rectangle isocèle, par conséquent les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ mesurent 45°.
Posons H le projeté orthogonal de E sur (AB) (voir figure ci-dessus).
BEH est un triangle rectangle, et on sait que BE=k et $\hat{B} = 45°$.
Nous allons calculer BH et EH afin d'en déduire les coordonnées de E
Un peu de trigo :
Dans BEH rectangle en H.
$\cos(\hat{B}) = \frac{BH}{BE}$ *soit* $\cos(45°) = \frac{BH}{k}$ *ce qui donne* $BH = \cos(45°) \times k = \frac{\sqrt{2}}{2}k$

De même : $\sin(\hat{B}) = \frac{EH}{BE}$ *soit* $\sin(45°) = \frac{EH}{k}$ *ce qui donne* $EH = \sin(45°) \times k = \frac{\sqrt{2}}{2}k$

On trouve ainsi : $E\begin{pmatrix} 1-\frac{\sqrt{2}}{2}k \\ \frac{\sqrt{2}}{2}k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}k}{2} \\ \frac{\sqrt{2}k}{2} \end{pmatrix}$

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF}$ *et en déduire si il existe des valeurs de k tel que DEF soit rectangle en D.*

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ puis $\overrightarrow{DF}$ avant de calculer $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF}$.

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}k}{2} - k \\ \frac{\sqrt{2}k}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}k-2k}{2} \\ \frac{\sqrt{2}k}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 0-k \\ 1-k-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 1-k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} &= \frac{2-\sqrt{2}k-2k}{2} \times (-k) + \frac{\sqrt{2}k}{2} \times (1-k) \\ &= \frac{2}{2} \times (-k) - \frac{\sqrt{2}k}{2} \times (-k) - \frac{2k}{2} \times (-k) + \frac{\sqrt{2}k}{2} - \frac{\sqrt{2}k^2}{2} \\ &= -k + \frac{\sqrt{2}k^2}{2} + k^2 + \frac{\sqrt{2}k}{2} - \frac{\sqrt{2}k^2}{2} = k^2 - k + \frac{\sqrt{2}k}{2} = k(k - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{aligned}$$

On veut que ce produit scalaire soit nul.
Résolvons l'équation suivante :

$$k\left(k - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

C'est une équation produit. Les solutions sont les solutions des 2 équations suivantes :
$k = 0$ et $k - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ soit : $k = 0$ et $k = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$