Fiche d'exercices 2 – Vecteurs et produit scalaire
coordonnées et orthogonalité

Ces exercices font appel au point II.1, II.2 et II.3 du cours.

Exercice 1 : Calcul de produit scalaire avec coordonnées

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-4\end{pmatrix}$.
Calculer :
1. $\vec{u}.\vec{v}$
2. $(3\vec{u}).\vec{v}$
3. $(4\vec{u}).(-2\vec{v})$
4. $\vec{u}.(\sqrt{2}\vec{u}-\vec{v})$

Exercice 2 : orthogonalité et coordonnées

Déterminer les éventuelles valeurs du réel x pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
1. $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x-1\\4\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\-2\end{pmatrix}$
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\8\end{pmatrix}$

Exercice 3 : orthogonalité, coordonnées et prise d'initiative

On considère les points du plan suivants : $A(-10;\,4)$, $B(-4;\,1)$ et $C(-1;\,7)$.
1. En utilisant le produit scalaire, montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

Exercice 4 : produit scalaire et identités remarquables

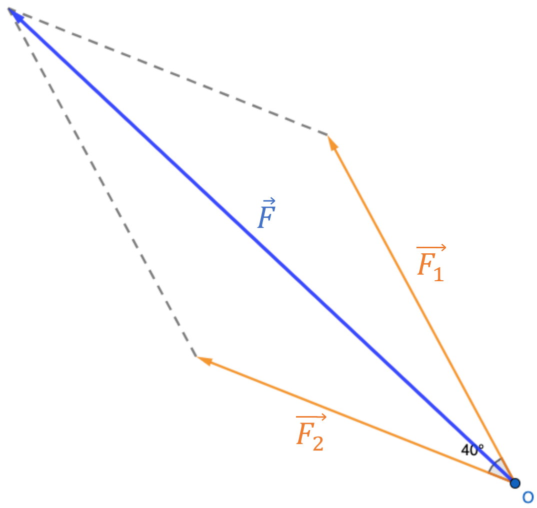
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u}.\vec{v} = 2$.
Calculer les expressions suivantes :
1. $\|\vec{u}-\vec{v}\|$
2. $\|\vec{u}+\vec{v}\|$
3. $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$
4. $(\vec{u}+2\vec{v}).(3\vec{u}+\vec{v})$

Aide :
On rappelle que :
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan.

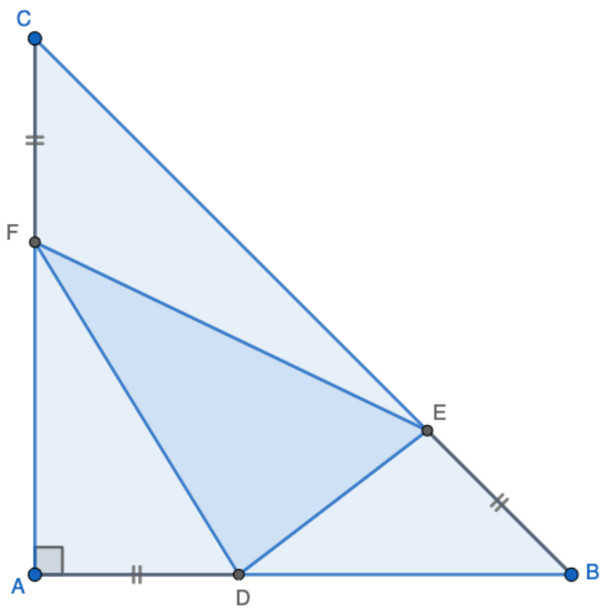
Exercice 5 : produit scalaire et identités remarquables

On applique deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ à un solide que l'on assimile à un point O.
On note $\vec{F}$ la résultante de ces 2 forces (voir schéma ci-contre).
1. Quel est le lien entre $\vec{F}$, $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$.
2. Sachant que $F_1 = 15\,N$, $F_2 = 13\,N$ et que l'angle $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 40°$, déterminer l'intensité de la résultante $\|\vec{F}\|$. Arrondir le résultat au dixième.



Exercice 6 : Prise d'initiative – avec un repère que vous posez

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB=AC=1.
Les points D, E et F sont placés sur les segments [AB], [BC] et [CA] tels que AD=BE=CF=k, avec $k \in [0;1]$.
Existe-t-il des valeur de k telle que le triangle DEF soit rectangle en D.



Aide :
L'objectif est ici de calculer $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF}$ est de trouver si il y a des valeurs de k qui annuleraient ce produit scalaire.
Pour cette exercice, il peut être plus simple de poser un repère, d'exprimer les coordonnées des points D, E et F dans ce repère, en déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ et d'utiliser la formule du produit scalaire avec ces coordonnées.
Vous pourrez travailler dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
Cela veut dire que l'origine du repère est en A, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ donne la direction et l'unité pour les abscisses et $\overrightarrow{AC}$ donne la direction et l'unité pour les ordonnées.
1. Déterminer en fonction de k les coordonnées des différents points de la figure dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
En particulier, montrer que $E\begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}k}{2} \\ \frac{\sqrt{2}k}{2} \end{pmatrix}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF}$ et en déduire si il existe des valeurs de k tel que DEF soit rectangle en D