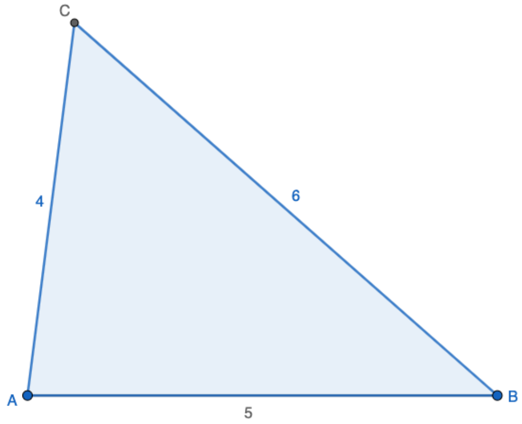
Fiche d'exercices 3 – Vecteurs et produit scalaire
formule avec des normes, Al-Kashi et $\overrightarrow{\mathbf{MA}}.\overrightarrow{\mathbf{MB}}$

Correction :

Ces exercices font appel au point III du cours.

Exercice 1 : En utilisant la formule du III.1.



On va utiliser la formule :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

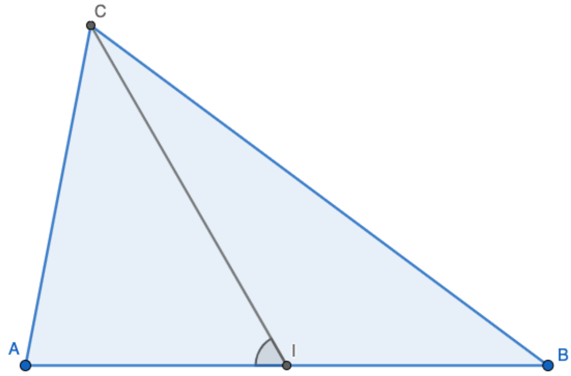
Dans la configuration ci-contre calculer :

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(5^2 + 4^2 - 6^2\right) = 2{,}5$

2. $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(CB^2 + AC^2 - BA^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 + 4^2 - 5^2\right) = 13{,}5$

3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 - AC^2\right) =$
$-\frac{1}{2}\left(5^2 + 6^2 - 4^2\right) = -22{,}5$

Exercice 2 :



Pour AC, nous allons utiliser Al-Kashi dans ACI :

$$AC^2 = IC^2 + IA^2 - 2 \times IC \times IA \times \cos\left(\widehat{AIB}\right)$$
$$= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$AC^2 = 7$$
$$AC = \sqrt{7}\ (car\ AC\ est\ positive\ étant\ une\ longueur)$$

Pour BC, nous allons utiliser Al-Kashi dans CIB $\left(\widehat{BIC} = \frac{2\pi}{3}\right)$ *:*

$$BC^2 = IB^2 + IC^2 - 2 \times BI \times IC \times \cos\left(\widehat{CIB}\right)$$
$$= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$BC^2 = 19$$
$$BC = \sqrt{19}$$

Exercice 3 : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

En vous inspirant de la démonstration du III.3, donner l'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2$.

Soit O milieu de [AB].

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = 2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2$

$or, OA = OB = \frac{1}{2}BA\ donc\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}BA \times \frac{1}{2}BA = -\frac{1}{4}BA^2$

$\Leftrightarrow MO^2 - \frac{1}{4}BA^2 + \overrightarrow{MO}.\left(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}_{\vec{0}}\right) = 2$

$$\Leftrightarrow MO^2 - \frac{1}{4}BA^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{1}{4}BA^2 + 2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{MO^2} = MO = \sqrt{\frac{1}{4}BA^2 + 2} \quad cf. MO \text{ et } BA \text{ sont des longueurs}$$

Il s'agit donc du cercle de centre O est de rayon $\sqrt{\frac{1}{4}BA^2 + 2}$.

Exercice 4 :

Soient A et B deux points du plan tels que AB=2. On cherche l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 8$.

1. I est le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = 8$.

Montrer que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$.

On a $I \in (AB)$, *donc* $\overrightarrow{AI}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires et pour que leur produit scalaire soit positif, ils sont de même sens..*

Donc, $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = AI \times AB = AI \times 2 = 8$

On a donc : $AI = \frac{8}{2} = 4 = 2AB$

A, I et B sont donc alignés, $AI = 2AB$, $\overrightarrow{AI}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires donc* $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$.

2. En introduisant le point I dans le premier vecteur de la relation de départ, faire apparaitre un produit scalaire nul.

car $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 8 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right).\overrightarrow{AB} = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 8 \Leftrightarrow 4 \times 2 + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 8$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 8 - 8 = 0$$

On a donc $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$.

3. En déduire l'ensemble des points recherchés.

Comme $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$, *on a (IM) perpendiculaire à (AB).*

L'ensemble des points M est donc les points de la droite perpendiculaire à (AB) et passant par I.

Exercice 5 : En vous inspirant de l'exercice 4.

On donne deux points A et B tels que AB=3.

Déterminer le lieu géométrique des points M vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 5$.

Posons le point C de (AB) tel que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 5$.

A,C et B sont alignés, le produit scalaire et positif, donc $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires et de même sens.*

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC \times AB = AC \times 3 = 5$$

Donc $AC = \frac{5}{3} = \frac{5}{9}AB$.

C est donc le point tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 5 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\right).\overrightarrow{AB} = 5 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \times 3 + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 5$$
$$\Leftrightarrow 5 + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 5 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 5 - 5 = 0$$

Les points M sont donc les points de la droite perpendiculaire à (AB) et passant par C.

Exercice 6 :

1. $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\right)\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AI}$*.*

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} = 0$ *car ces 2 vecteurs sont orthogonaux, et* $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AI} = 0$ *de même.*
Donc, $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{DA} = a \times \frac{3}{4}a - \frac{3}{4}a \times a = 0$

2. Que peut-on en déduire pour les droites (AJ) et (DI) ?
Comme $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = 0$, *les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.*