Fiche d'exercices 4 – Vecteurs et produit scalaire
Exercices et problèmes de synthèse

Correction :

Exercice 1 (synthèse de 2[nde] à savoir faire par tous !)

On considère les trois points du plan A, B et C de coordonnées : A(–3 ; 2) ; B(–2 ; –2) ; C(2 ; –1)

a. Déterminer les coordonnées du milieu I de [AB]

$$I\left(\frac{-3+(-2)}{2};\frac{2+(-2)}{2}\right)=(\frac{-5}{2};0)$$

b. Déterminer les distances AB, AC et BC.

$$AB=\sqrt{(-2-(-3))^2+(-2-2)^2}=\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$$
$$AC=\sqrt{(2-(-3))^2+(-1-2)^2}=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$$
$$BC=\sqrt{(2-(-2))^2+(-1-(-2))^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$$

c. Établir que le triangle ABC est un triangle rectangle.

On remarque que l'on a : $AC^2=AB^2+BC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.

Remarque :

Comme vous avez trouvé les 3 longueurs du triangle, passer par la nullité du produit scalaire pour montrer un angle droit n'est ici pas très intéressant niveau temps, même si cette méthode fonctionne.

Exercice 2 : Niveau au choix niveau expert

1. (ou 1. et 2.)

Pour que ABCD soit un plg, il suffit que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Soit C le point de coordonnées (x ;y).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-8-(-2)\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x-(-3)\\y-\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3\\y-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

Comme on veut que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$*, on a :* $\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3\\y-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ *soit* $\begin{cases}-6=x+3\\-4=y-\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\y=-4+\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}\end{cases}$

2. (ou 3.)

Pour montrer que ABCD est un rectangle, il suffit de prouver un angle droit vu qu'il est déjà un plg.

Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3-(-2)\\\frac{5}{2}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-6\times(-1)+(-4)\times\frac{3}{2}=6-6=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *sont donc orthogonaux. ABCD est bien un rectangle.*

Exercice 3 :

On veut que les diagonales soient perpendiculaires, donc que $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *soient orthogonaux et que <u>leur produit scalaire soit nul</u>.*
Il y a plusieurs façons d'y arriver pour calculer $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$*.*
Vous pouvez faire une relation de Chasles sur ces 2 vecteurs, distribuer et avec simplification avoir une expression assez simple du produit scalaire avec du x.
Vous pouvez aussi travailler dans un repère d'origine A, et donc l'axe des abscisses est porté par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ *et l'axe des ordonnées par le vecteur* $\overrightarrow{AD}$.
Partons sur cette méthode :
Dans ce repère nous allons donner les coordonnées des 4 points et en déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{AC}$*.*
Ainsi : $A\binom{0}{0}, B\binom{x}{0}, C\binom{3}{2}$ *et* $D\binom{0}{2}$*.*
$\overrightarrow{BD}\binom{0-x}{2-0} = \binom{-x}{2}$ *et* $\overrightarrow{AC}\binom{3-0}{2-0} = \binom{3}{2}$*.*

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = -x \times 3 + 2 \times 2 = -3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Il était aussi possible de calculer $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$ *à l'aide de 2 relations de Chasles :*

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \cdots$$

Exercice 4 :

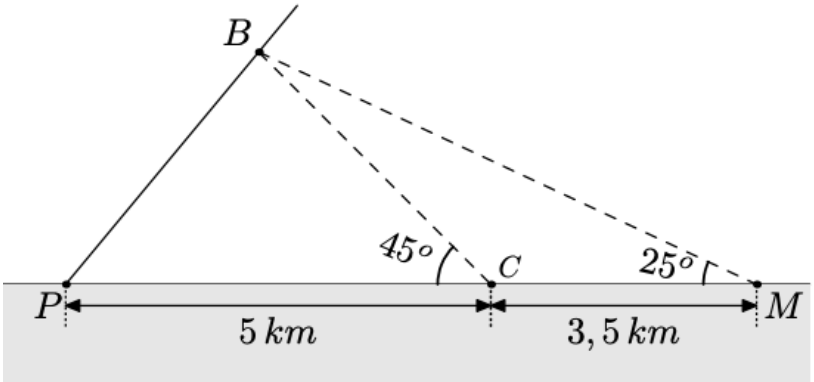
Ici, il faut calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI}$ *est montrer qu'il vaut 0.*
On peut passer par un repère, ou une relation de Chasles.
Faisons la relation de Chasles pour changer de l'exercice 3…
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right).(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI})$ *(l'intérêt est de faire apparaitre des vecteurs qui sont colinéaires ou orthogonaux pour avoir des simplifications intéressantes…)*
$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CI} = AD \times BC + 0 + 0 + (-DC \times CI)$

$$Remarque\text{: } \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = AD \times BC \text{ car colinéaires de même sens et}$$
$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CI} = -DC \times CI \text{ car colinéaires de sens contraire}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2}a - a \times \frac{a}{2} = \frac{2}{4}a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

Les diagonales sont bien perpendiculaires.

Exercice 5 : choisir votre niveau de difficulté :



1. a. Déterminer les mesures des angles du triangle BCM.
On a $\widehat{CMB} = 25°$. On a : $\widehat{MCB} = 180° - \widehat{BCM} = 180° - 45° = 135°$.
Et enfin, $\widehat{MBC} = 180° - \widehat{MCB} - \widehat{CMB} = 180° - 25° - 135° = 20°$.

b.
En utilisant la formule des sinus :

$$\frac{\sin(\widehat{BCM})}{BM} = \frac{\sin(\widehat{CMB})}{CB} = \frac{\sin(\widehat{MBC})}{MC}$$
$$\frac{\sin(135°)}{BM} = \frac{\sin(25°)}{CB} = \frac{\sin(20°)}{3{,}5}$$

On en déduit : $BC = \frac{\sin(25°)\times 3{,}5}{\sin(20°)} \approx 4{,}3\ km$

2. Dans le triangle CBP, les formules d'Al-Kashi s'exprime par :

$$PC^2 = PB^2 + BC^2 - 2 \times PB \times BC \times \cos(\widehat{PBC})$$
$$PB^2 = PC^2 + BC^2 - 2 \times PC \times BC \times \cos(\widehat{PCB})$$
$$BC^2 = PC^2 + PB^2 - 2 \times PC \times PB \times \cos(\widehat{CPB})$$

On veut trouver PB.
Avec Al-Kashi dans PBC :

$$PB^2 = PC^2 + BC^2 - 2 \times PC \times BC \times \cos(\widehat{PCB}) = 5^2 + 4{,}3^2 - 2 \times 5 \times 4{,}3 \times \cos(45°)$$

$PB = \sqrt{5^2 + 4{,}3^2 - 2 \times 5 \times 4{,}3 \times \cos(45°)} \approx 3{,}6\ km.$