Fiche d'exercices 5 – Vecteurs et produit scalaire
Exercices et problèmes de synthèse

Correction :

Exercice 1 (synthèse de 2nde à savoir faire par tous !)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times 4 \times \cos(150°) = 8 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4\sqrt{3}.$

Exercice 2 : Niveau au choix niveau expert

Soit $A(-1;-1)$, $B(0;-2)$ et $C(1;2)$.

Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?

On calcule les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis leur produit scalaire pour pouvoir conclure.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + (-1) \times 3 = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

(AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.

Exercice 3 :

1. Donner les coordonnées des sommets du cube et de I dans ce repère.

$$A(0;0;0)\ \ (\,c'est\ l'origine\ de\ notre\ repère)$$
$$B(1;0;0);\ C(1;1;0);\ D(0;1;0);\ E(0;0;1);\ F(1;0;1)$$
$G(1;1;1);\ H(0;1;1)$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AF}(1;0;1)$

Donc $I\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$.

2. Calculer CI.

Avec la formule :

$$CI = \sqrt{(x_I - x_C)^2 + (y_I - y_C)^2 + (z_I - z_C)^2} = \sqrt{(\frac{1}{2} - 1)^2 + (0-1)^2 + (\frac{1}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

3. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont orthogonaux.

Calculons les coordonnées de ces 2 vecteurs :

$\overrightarrow{AG}\,(1;1;1)$ *et* $\overrightarrow{FH}\,(0-1;1-0;1-1)=(-1;1;0)$.
$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FH}=1\times(-1)+1\times 1+1\times 0=0$.
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ *et* $\overrightarrow{FH}$ *sont orthogonaux.*

Exercice 4 :

1. En calculant $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ *de deux façons différentes, en déduire que* $OB=\frac{9}{5}$.

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=BA^2+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}=BA^2$$
$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}\right).\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}=BO\times BD$$

Des deux égalités, on trouve que : $BA^2=BO\times BD$ *et donc que* $BO=\frac{BA^2}{BD}$

Pour trouver BD, nous appliquons le théorème de Pythagore, dans ABD rectangle en A.
On trouve ainsi que $BD=\sqrt{4^2+3^2}=5$.
Ainsi, il vient que $BO=\frac{BA^2}{BD}=\frac{3^2}{5}=\frac{9}{5}$

2. Déterminer OD.
En décomposant différemment $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ *:*
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}=BO^2+BO\times OD+0+0$
$=BO^2+BO\times OD$.

Ainsi : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=BO^2+BO\times OD=BA^2=9$
$$\left(\frac{9}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\times OD=9\Leftrightarrow OD=\frac{5}{9}\times\frac{144}{25}=\frac{16}{5}$$

Ou Pythagore OD=BD-OB=… plus court
3. Calculer CD, puis AC.

Pour CD :
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right).\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$$
$$=-AD^2+0+0+DC\times AB=0\ car\ (AC)et\ (BD)sont\ perpendiculaires.$$

D'où : $DC=\frac{AD^2}{AB}=\frac{16}{3}$.

Pour AC :
Pythagore dans ADC rectangle en D :
On trouve : $AC=\sqrt{4^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{400}{9}}=\frac{20}{3}$

4. Déterminer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=0\ (vecteurs\ orthogonaux)$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=AD^2=16\ (D\ est\ le\ projeté\ orthogonal\ de\ C\ sur\ (AD))$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}).\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OD} = BD\times OD - \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DC} = 5\times\frac{16}{5} - OD^2$$
$$= \frac{9}{5}\times\frac{16}{5} - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = -\frac{112}{25}$$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = AD\times AD = 16$ $(car\ D\ est\ le\ projeté\ ortho\ de\ C\ sur\ (AD))$ *ou avec une relation de Chasles :* $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} = AD^2+0 = 16.$

Exercice 5 : choisir votre niveau de difficulté :

Soit ABC un triangle. On note $c = AB$, $b = AC$ et $a = BC$, $\hat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$ et S l'aire du triangle ABC.

On attribue à Héron d'Alexandrie, mathématicien du Ier siècle après J.C., une formule qui permet de calculer l'aire d'un triangle à partir de la longueur de ses côtés. La formule de Héron est la suivante :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{où } p \text{ est le demi} - \text{périmètre du triangle.}$$

Donc $p = \frac{a+b+c}{2}$.

1.

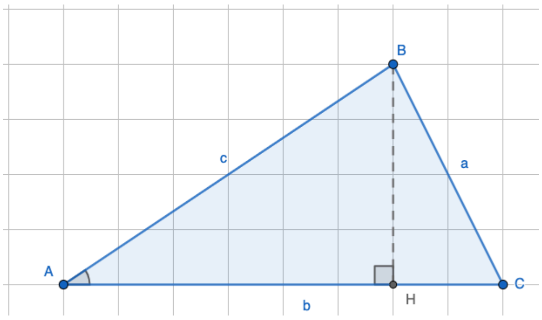
$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{11+8+6}{2} = 12{,}5\ cm$$

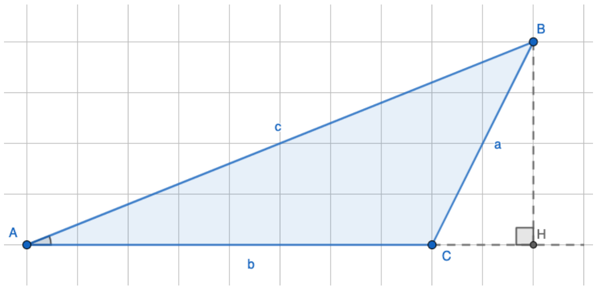
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12{,}5(12{,}5-11)(12{,}5-8)(12{,}5-6)} = \sqrt{548{,}4375} \approx 23{,}42\ cm^2$$

2. On veut démontrer la formule de Héron.

a. Démontrer que $S = \frac{1}{2}bc.\sin\hat{A}$ *dans les 3 cas suivants.*

i. et iii. Cas 1 et 2 :





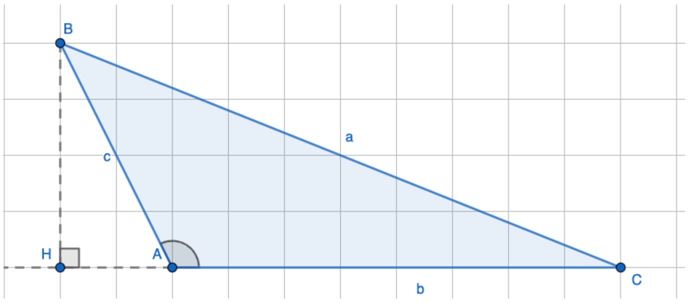
Dans ces 2 cas, un coup de trigonométrie dans ABH, rectangle en H, permet de trouver une hauteur du triangle ABC ([HB]) :

$$\sin(\hat{A}) = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{c}$$

D'où : $HB = c.\sin\hat{A}$

L'aire de ABC est : $S = \frac{1}{2}b\times HB = \frac{1}{2}bc.\sin\hat{A}$

iii. Cas 3



On fait la même chose :

Dans HAB rectangle en H :

$$\sin(\widehat{HAB}) = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{c}$$
$$\sin(\widehat{HAB}) = \sin(180° - \hat{A}) = sin\hat{A}$$

On trouve ainsi : $sin\hat{A} = \frac{HB}{c}$ et la suite est identique au cas 1 et 2...

b.

Avec la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\hat{A} \Leftrightarrow 2bc \times \cos\hat{A} = b^2 + c^2 - a^2$$

On élève au carré chaque membre de l'égalité :

$$4b^2c^2.cos^2\hat{A} = (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

c. Justifier les 3 égalités suivantes :

i. *On va utiliser le fait que :* $cos^2\hat{A} + sin^2\hat{A} = 1$ *et donc que* $cos^2\hat{A} = 1 - sin^2\hat{A}$*.*

$$4b^2c^2.cos^2\hat{A} = (b^2 + c^2 - a^2)^2 \Leftrightarrow 4b^2c^2.(1 - sin^2\hat{A}) = (b^2 + c^2 - a^2)^2$$
$$\Leftrightarrow 4b^2c^2 - 4b^2c^2.sin^2\hat{A} = (b^2 + c^2 - a^2)^2 \Leftrightarrow 4b^2c^2.sin^2\hat{A} = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

ii.

On va transformer le membre de droite de l'égalité i. car on reconnait une identité remarquable :

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc - (b^2 + c^2 - a^2))(2bc + (b^2 + c^2 - a^2))$$

iii. $4b^2c^2.sin^2\hat{A} = (a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)$

On travaille encore sur le membre de droite :

$$\big(2bc - (b^2 + c^2 - a^2)\big)\big(2bc + (b^2 + c^2 - a^2)\big) = (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)$$
$$= (a^2 - (b^2 - 2bc + c^2))(b^2 + 2bc + c^2 - a^2) = (a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)$$

d.

On va travailler sur l'égalité : $4b^2c^2.sin^2\hat{A} = (a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)$

On avait montré que : $S = \frac{1}{2}bc.sin\hat{A}$ *soit* $bc.sin\hat{A} = 2S$

D'où : $b^2c^2.\sin^2\hat{A} = 4S^2$ *(en élevant au carré) et donc que* $4b^2c^2.\sin^2\hat{A} = 16S^2$*.*

Ensuite : $(a^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - a^2)$*. Dans les 2 parenthèses on reconnait une identité remarquable* $(A^2 - B^2)$.
D'où : $(a^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - a^2) = \big(a - (b-c)\big)\big(a + (b-c)\big)\big((b+c) - a\big)\big((b+c) + a\big) = (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a) = (a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(b + c - a)$

On a donc : $16S^2 = (a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(b + c - a)$
$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$
Donc :

$$S^2 = \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a-b+c}{2} \times \frac{a+b+c}{2} \times \frac{b+c-a}{2}$$

e.

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{a+b+c}{2} \times \frac{b+c-a}{2} \times \frac{a-b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2}$$

La conclusion vient aisément...