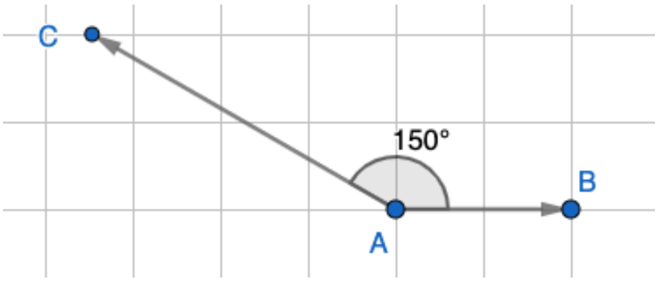
Fiche d'exercices 5 – Vecteurs et produit scalaire
Exercices et problèmes de synthèse

Exercice 1

Sur la figure ci-contre, $AB = 2$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 150°$.
Calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



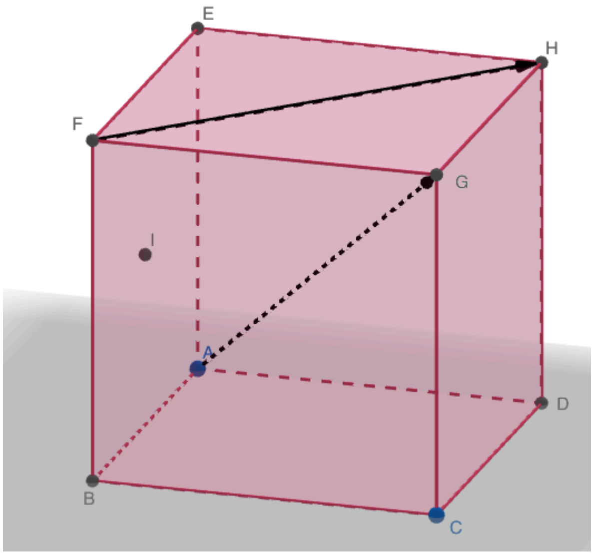
Exercice 2 :

Soit $A(-1;-1)$, $B(0;-2)$ et $C(1;2)$.
Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 3 : Extension vers la terminale

ABCDEFGH est un cube de côté 1. I est le milieu de [AF].
On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des sommets du cube et de I dans ce repère.
2. Calculer CI.
3. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont orthogonaux.



Voici des formules de Terminales :

Dans une base orthonormées $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$, $\vec{u}\,(x;y;z)$ et $\vec{v}\,(x';y';z')$ sont 2 vecteurs, $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ sont 2 points de l'espace.

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

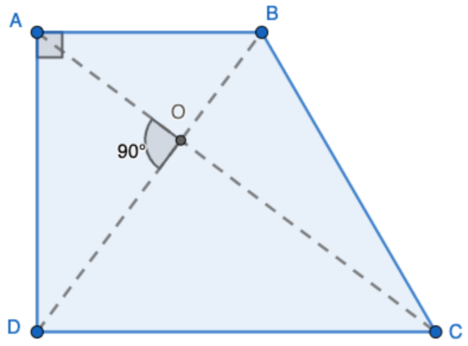
Les coordonnées du milieu du segment [AB] sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_B-z_A}{2}\right)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exercice 4 :



ABCD est un trapèze de base [AB] et [DC], qui est rectangle en A et dont les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires et se coupent en O.
On a AB=3 et AD=4.

1. En calculant $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ de deux façons différentes, en déduire que $OB = \frac{9}{5}$.
2. Déterminer OD.
3. Calculer CD (possibilité de s'intéresser à une décomposition intéressante de $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$) , puis AC.
4. Déterminer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$.

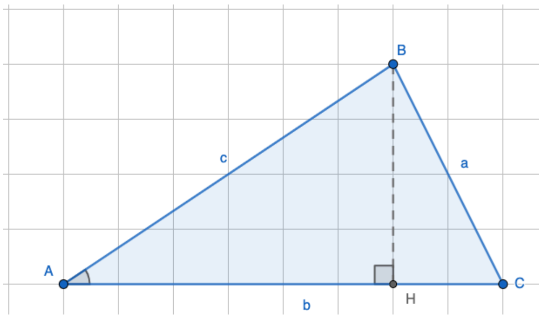
Exercice 5 : Formule de Héron (Très complet et d'un bon niveau...)**

Soit ABC un triangle. On note $c = AB$, $b = AC$ et $a = BC$, $\hat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$ et S l'aire du triangle ABC.
On attribue à Héron d'Alexandrie, mathématicien du Ier siècle après J.C., une formule qui permet de calculer l'aire d'un triangle à partir de la longueur de ses côtés. La formule de Héron est la suivante :

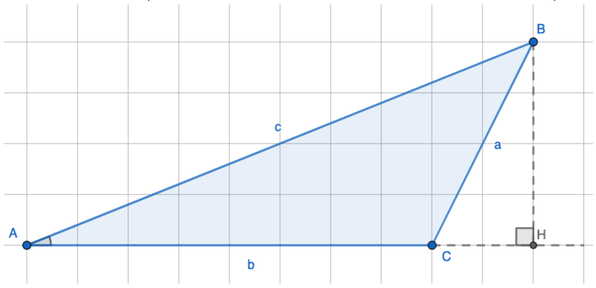
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, où\ p\ est\ le\ demi-périmètre\ du\ triangle.$$

Donc $p = \frac{a+b+c}{2}$.

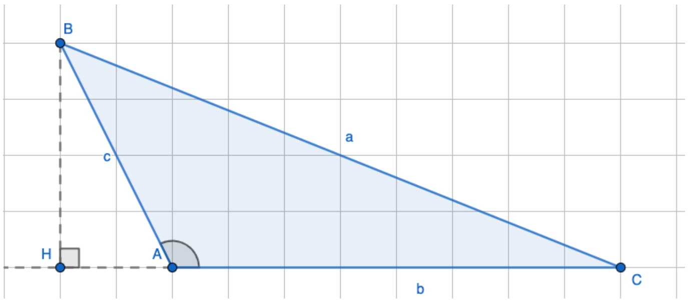
1. Appliquer cette formule au triangle de côté $AB = 11cm$, $AB = 8cm$ et $BC = 6cm$. On donnera une valeur exacte et une valeur approchée au centième de cm².
2. On veut démontrer la formule de Héron.
a. Démontrer que $S = \frac{1}{2}bc.sin\hat{A}$ dans les 3 cas suivants.
i. Cas 1



ii. Cas 2 (pas la montagne... désolé...)



iii. Cas 3



Aide : $sin\left(180° - \hat{A}\right) = sin\hat{A}$

b. En utilisant la formule d'Al-Kashi, justifier que $2bc.cos\hat{A} = b^2 + c^2 - a^2$ et en déduire que $4b^2c^2.cos^2\hat{A} = (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

c. Justifier les 3 égalités suivantes :
i. $4b^2c^2.sin^2\hat{A} = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$
ii. $4b^2c^2.sin^2\hat{A} = (2bc - (b^2 + c^2 - a^2))(2bc + (b^2 + c^2 - a^2))$
iii. $4b^2c^2.sin^2\hat{A} = (a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)$

d. En déduire que :

$$S^2 = \frac{a + b - c}{2} \times \frac{a - b + c}{2} \times \frac{a + b + c}{2} \times \frac{b + c - a}{2}$$

e. Calculer $p(p - a)(p - b)(p - c)$, puis conclure.

Aide : Question 2.a : introduire la hauteur h issue de B. On rappelle que $S = \frac{1}{2}bh$.