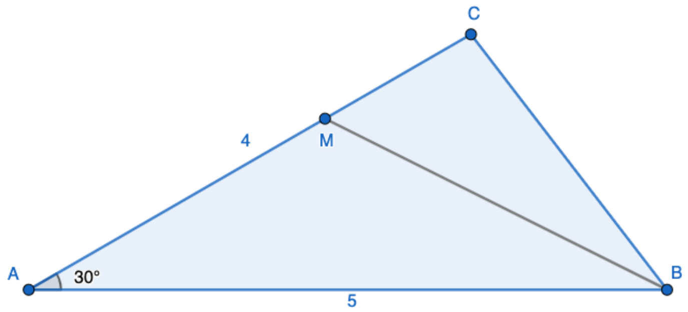
Fiche d'exercices 6 – Vecteurs et produit scalaire
Exercices et problèmes de synthèse

Correction :

Exercice 1 :



On va calculer pour quelle valeur de x on a $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$.

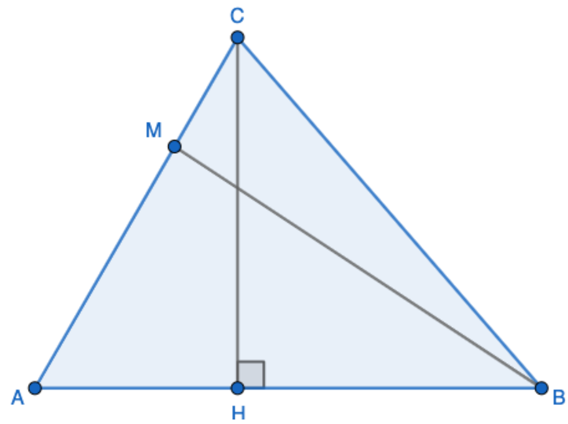
$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + x \times 4 = -AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) + 4x = -20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4x = -10\sqrt{3} + 4x = 0$.

En résolvant cette équation, on trouve $x = 2{,}5\sqrt{3}$.

On peut parfaitement résoudre ce problème avec des outils de 3^{ème}, en travaillant dans le triangle AMB que l'on veut rectangle en M et avec de la trigo…

Exercice 2 :

Soit la configuration ci-contre où ABC est un triangle tel que AB=5, AC=4. H est le pied de la hauteur issue de C avec AH=2.
M est un point de [AC) tel que AM=x.
Pour quelle valeur de x, on a (BM) perpendiculaire à (AC).



On va calculer pour quelle valeur de x on a $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$.

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + x \times 4 = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + 4x$.

À partir de là, pour calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, *vous pouvez remarquer que H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et donc* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 10$.

Vous pouvez aussi utiliser ce bon vieux Chasles :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = AB \times AH + 0 = 10$.

On obtient donc :

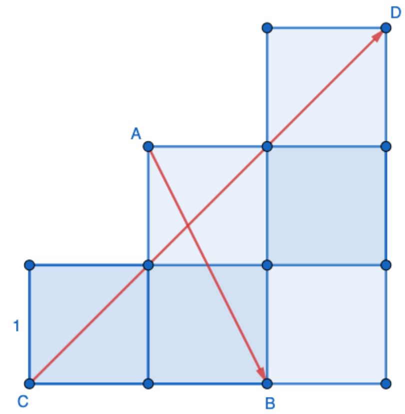
$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + 4x = -10 + 4x = 0$$

Soit $x = \frac{10}{4} = 2{,}5$.

On peut aussi se ramener au pb de l'exercice 1 en calculant $\widehat{HAB}$ *avec de la trigo et suivre la résolution comme l'exercice 1.*

Exercice 3 :

Dans la configuration suivante où tous les carrés ont pour côté 1, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.



Le plus simple ici est de poser un repère orthonormal d'origine C, est donc les axes suivent les côtés du carré partant de C dans le carré de gauche.

On exprime les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère, puis les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

Vous devez trouver :

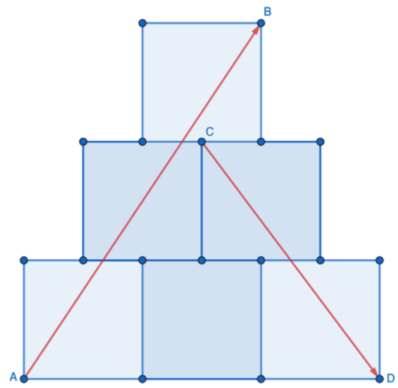
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

Il vient : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 1 \times 3 + (-2) \times 3 = -3$.

Il est aussi possible de poser des points de façon astucieuse et de sortir Chasles…

Exercice 4 :

Dans la configuration suivante où tous les carrés ont pour côté 1, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.



On réalise la même chose que l'exercice 4, avec un repère d'origine A.

Vous devez trouver :

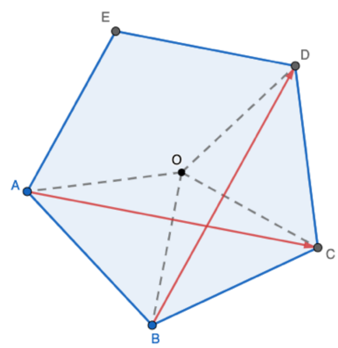
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1{,}5\\-2\end{pmatrix}$$

Il vient : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 2 \times 1{,}5 + 3 \times (-2) = -3$.

Exercice 5 :

Niveau ??? :

Soit ABCDE un pentagone régulier de côté 1. O, le centre de ce pentagone.



1. Combien mesure les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, …
2. Dans AOB, on nomme H le pied de la hauteur issue de O (cf dessin ci-contre).

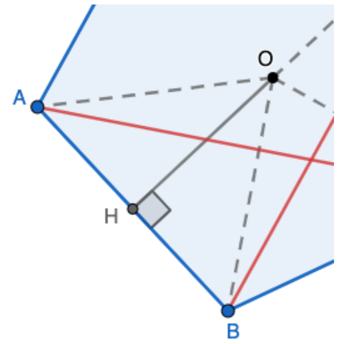
    a. Quelle est la nature du triangle AOB.

b. En déduire AH et $\widehat{AOH}$.

c. Calculer AO.

3. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ à l'aide d'une relation de Chasles passant par O.

4. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.



Je ne vais pas le corriger dans l'ordre du niveau ???, mais dans l'ordre logique pour une résolution niveau expert. Je mettrai cependant à quelle réponse cela correspond pour une meilleure lecture.

1.Comme O est le centre de ce polygone régulier on a $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \frac{360°}{5} = 72°$.

Remarque : on a aussi OA=OB=OC=OD=OE.

3. et 4. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB}) - OC \times OB \times \cos(\widehat{COB}) - OA \times OD \times \cos(\widehat{AOD}) + OC \times OD \times \cos(\widehat{COD})$=$OA^2 \times (\cos(\widehat{AOB}) - \cos(\widehat{COB}) - \cos(\widehat{AOD}) + \cos(\widehat{COD}))$

Comme $\widehat{AOB} = \widehat{COB}$ *on a donc :* $\cos(\widehat{AOB}) = \cos(\widehat{COB})$

Donc, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = OA^2 \times (-\cos(\widehat{AOD}) + \cos(\widehat{COD}))$

$\widehat{AOD} = 3 \times 72° = 216°$ *et* $\widehat{COD} = 72°$.

2. Pour OA, posons dans OAB, H le pied de la hauteur issue de O.

OAB est isocèle en O. (OH) est donc une hauteur mais aussi médiatrice de [AB] et bissectrice de $\widehat{AOB}$.

Un peu de trigonométrie dans AOH rectangle en H, sachant que AH=0,5 et $\widehat{AOH} = 36°$ *;*

$\sin(\widehat{AOH}) = \frac{AH}{AO}$

$\sin(36°) = \frac{0,5}{AO}$ *d'où* $AO = \frac{0,5}{\sin(36°)}$

Finalement on a $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\frac{0,5}{\sin(36°)})^2 \times (-\cos(216°) + \cos(72°))$