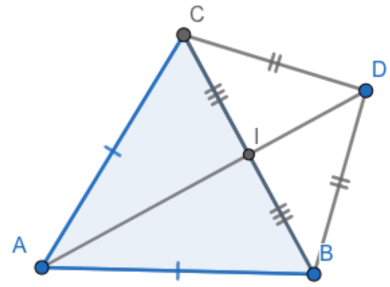
Méthode : Calculer un produit scalaire avec la projection orthogonale

Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB=2 et BCD un triangle isocèle en D tel que BD=$\sqrt{3}$ et D extérieur au triangle ABC. On note I le milieu de [BC].

1. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires en I.
2. Calculer $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$.



Correction :

On obtient la figure ci-contre.

1. A et D sont équidistants de B et de C donc (AD) est la médiatrice de [BC]. (AD) et donc perpendiculaire à [BC] en son milieu I.

2. I est le projeté orthogonal de C sur (AD) et $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$*sont de même sens.*

Donc : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = AD \times AI$

D'après le théorème de Pythagore dans les triangles ACI et CID rectangles en I, $AC^2=AI^2+IC^2$ *et* $CD^2=IC^2+ID^2$.

Donc, $2^2=IA^2+1^2$, *d'où* $IA^2=3$ *et donc* $IA=\sqrt{3}$.

De même, $\sqrt{3}^2=1^2+ID^2$, *d'où* $ID^2=2$ *et donc* $ID=\sqrt{2}$.

$AD=AI+ID=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

On en déduit : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = AD \times AI = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \times \sqrt{3} = 3+\sqrt{6}$.