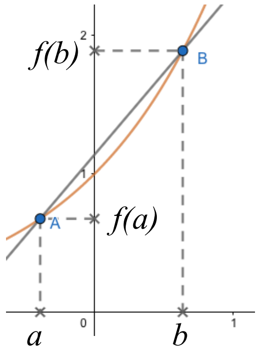
Chapitre IV

Dérivation (point de vue local) et valeur absolue

Table des matières

I. Taux de variation et nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère du plan ; a un réel de I et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a et B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse b.

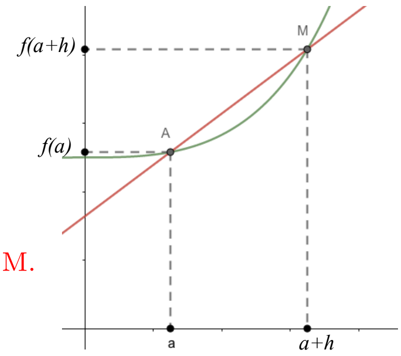


Définition :

On appelle taux de variation entre a et b, le nombre $r = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ce nombre est la pente de la droite (AB), sécante à C passant par les points A et B.

Soit h un réel <u>non nul</u> tel que $a+h$ appartient à I.



Soit M($a+h$;$f(a+h)$) un point de $\mathscr{C}$.

Définition :

On appelle taux de variation de f entre a et $a+h$ le nombre $r(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Ce nombre est la <u>pente</u> de la droite (AM), sécante à $\mathscr{C}$ passant par les points A et M.

Définition :

On dit que f est **dérivable en a** lorsque le taux de variation tend vers un réel L (<u>non infini</u>) lorsque h prend des valeurs proches de 0.

Ce réel L est appelé le **nombre dérivé de f en a**.

Il est noté $f'(a)$. On écrit alors

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ex. :

Soit f telle que $f(x)=x^2$. On veut savoir si f est dérivable en 1.

On calcule le taux de variation de f entre 1 et 1+h, avec h≠0 :

$$r(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$$

On a $\lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2+0 = 2$.

Donc la fonction carré est dérivable en 1 et on a $f'(1)=2$.

II. tangente à une courbe en un point

Définition :

Soit f une fonction dérivable en a, et soit C_f sa courbe représentative dans un repère.

Alors la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite passant par le point $A\big(a\,;f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété :

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $A\big(a\,;f(a)\big)$ est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Démonstration :

1°) La tangente est une droite non verticale, donc son équation est de la forme : $y = mx + p$.

2°) Par définition, en a*, son coefficient directeur est* $f'(a)$

Son équation est donc désormais : $y = f'(a) \times x + p$

3°) Enfin, cette tangente passe par $A\big(a\,;f(a)\big)$ *donc ses coordonnées vérifient l'équation :* $f(a) = f'(a) \times a + p$

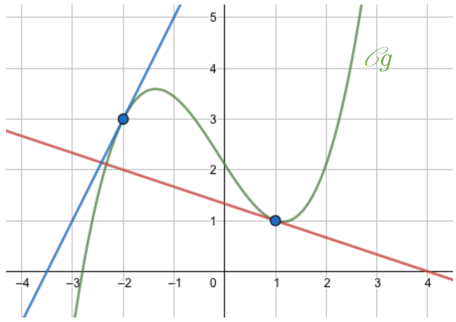
$$\Leftrightarrow p = f(a) - f'(a) \times a$$

4°) En conclusion, l'équation de la tangente est :

$y = \underline{f'(a) \times x} + f(a) - \underline{f'(a) \times a}$ *(on va pouvoir factoriser par f'(a))*

$\Leftrightarrow y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$

Méthode : Déterminer graphiquement un nombre dérivé



On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}g$ d'une fonction g ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -2 et 1.

1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de g en -2.

2. Déterminer graphiquement *g'(1)*.

Correction :

1. Le nombre dérivé de g en -2 est la pente de la tangente à $\mathcal{C}g$ *au point d'abscisse -2. On cherche donc la pente de la droite bleue. Lorsqu'on « avance »d'une unité en abscisse, on doit « monter » de 2 unités en ordonnée pour retrouver la droite. La pente de la tangente est donc de 2. Ainsi le nombre dérivé de g en -2, g'(-2)=2.*

2. le nombre g'(1) est la pente de la tangente à $\mathcal{C}g$ *au point d'abscisse 1. C'est donc la pente de la droite rouge. Ainsi, g'(1)=*$-\frac{1}{3}$.

Méthode : Déterminer l'équation d'une tangente en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par *f(x)=*$x^2 + x$. Sachant que *f'(1)=3*, donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point d'abscisse 1.

Correction :

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme : y=f'(1)(x-1)+f(1).

f(1)=1^2*+1=2 et f'(1)=3.*

D'où : y=3(x-1)+2, soit y=3x-1.

III. Fonction valeur absolue

Définition :

La valeur absolue d'un nombre réel positif est le nombre lui-même.

La valeur absolue d'un nombre négatif est l'opposé de ce nombre.

Autrement dit, la fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x \ \ si\ x \geq 0 \\ -x\ si\ x < 0 \end{cases}$$

Exemples : $|4| = 4$; $|-7| = 7$;

$|2-\pi| = -(2-\pi) = \pi - 2 \approx 1{,}14$

Propriété : (admise) : Pour tout nombre réel x

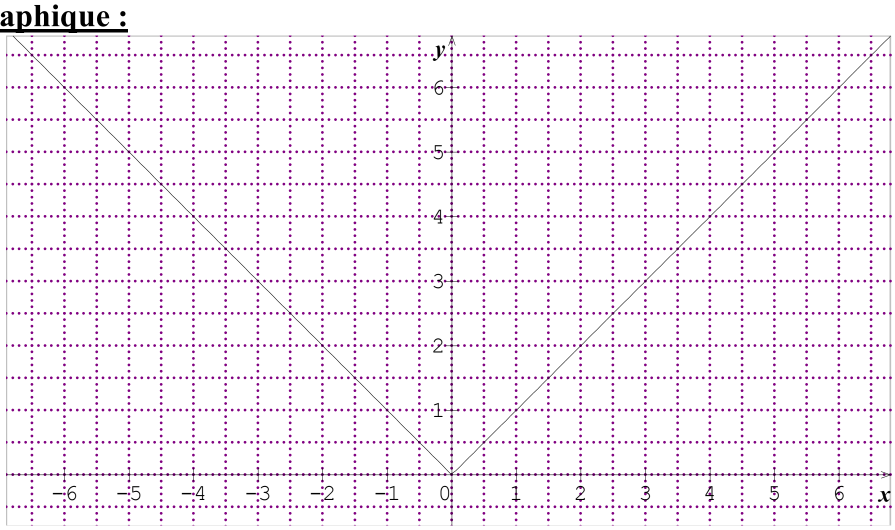
- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0\ \ si\ et\ seulement\ si\ \ x = 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

Propriété :
La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, puis strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Démonstration :
Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $|x| = x$ *qui est une fonction affine strictement croissante.*
De même, sur $]-\infty;0]$, $|x| = -x$ *qui est une fonction affine strictement décroissante*.

<u>Représentation graphique :</u>



Propriété :
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Démonstration :

Si x>0 : f(-x)=-(-x)=x

Si x<0 : f(-x)=considérons les points $M(x\,;\,|x|)$ *et* $N(-x\,;\,|-x|)$. *Ces points appartiennent tous les deux à la courbe représentative de la fonction valeur absolue.*

Or $|x| = |-x|$. *Donc* M *et* N *ont la même ordonnée mais des abscisses opposées : ces deux points sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.*

Propriétés :

Soit f la fonction valeur absolue.

Pour tout $x \neq 0$, f est dérivable. Si $x < 0$, alors *f'(x)=-1* ; si $x > 0$, alors *f'(x)=1*.

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Démonstration : Non dérivabilité en 0.

On note f la fonction valeur absolue. L'idée est ici de montrer que la limite du taux d'accroissement de f, quand h tend vers 0, est différente selon que h>0 ou que h<0.

Si h>0, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0, h>0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$.

Si h<0, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$. Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0, h<0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$.

Par conséquent, selon si h est positif ou négatif, on obtient deux limites différentes pour le taux d'accroissement de f entre 0 et 0+h. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Graphiquement, la courbe représentative de f an au point d'abscisse 0, une demi-tangente de pente -1 (à gauche de 0) et une demi-tangente de pente 1 à droite de 0.