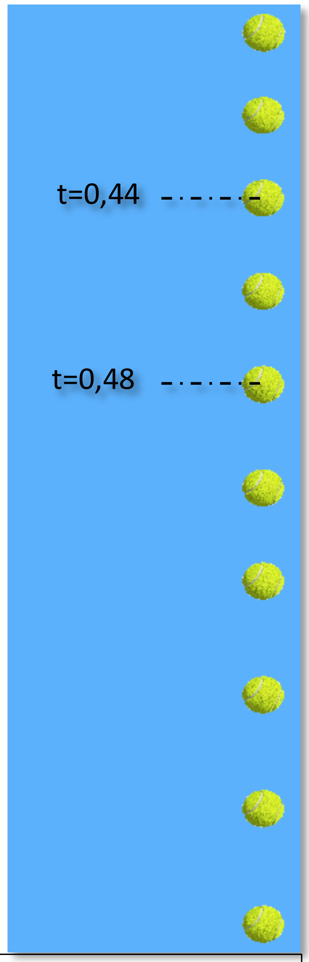
Fiche d'exercices 1 – Dérivation et notion
Activités et exercices – Taux de variation/ Nombre dérivé

Activité : Balle et chute libre

La chute d'une balle de tennis a été prise en photos à intervalles réguliers de 0,02 seconde (chronophotographie)
Des mesures de la distance d(t) parcourue par la balle (en mètre) en fonction du temps t (en seconde) sont effectuées et sont données dans le tableau suivant.



t	0,44	0,46	0,48	0,5	0,52	0,54	0,56
d(t)	0,95	1,04	1,13	1,23	1,32	1,43	1,54

La vitesse moyenne de la balle est égale au quotient de la distance parcourue par le temps écoulé.

1. a. Montrer que la vitesse moyenne de la balle entre 0,5s et 0,54s est égale à 5 $m.s^{-1}$(m/s).
b. Montrer que la vitesse moyenne de la balle entre 0,5s et 0,52s est égale à 4,5 $m.s^{-1}$.

2. On admet que la distance d(t) parcourue par la balle en fonction du tems t écoulé depuis le lâcher s'exprime par la formule
$d(t) = 4{,}9t^2$.
Soit *r* la fonction définie pour tout réel *h* non nul par $r(h) = \frac{d(0{,}5+h)-d(0{,}5)}{h}$.
a. Montrer que $r(h) = 4{,}9h + 4{,}9$.
b. Calculer *r(0,1)* puis interpréter le résultat en terme de vitesse.
c. Calculer *r(0,01)* puis *r(0,001)*. On arrondira les résultats, si nécessaire, à 0,001.

Aide : Pour le 2.a., vous pourrez calculer d(0,5+h), puis d(0,5) et appliquer la formule r(h).

On constate que la vitesse moyenne de la balle entre 0,5 et 0,5+*h* se rapproche de 4,9 $m.s^{-1}$, quand *h* se rapproche de 0.
On dit que $\frac{d(0{,}5+h)-d(0{,}5)}{h}$ a pour limite 4,9 quand *h* tend vers 0 et on note :

$$\lim_{h \to 0} \frac{d(0{,}5+h)-d(0{,}5)}{h} = 4{,}9.$$

Ce nombre est appelé le **nombre dérivé de *d* en 0,5**, et on le note $\boldsymbol{d'(0,5)}$. Ainsi, $d'(0{,}5) = 4{,}9$.
Dans notre exemple, cette valeur est la vitesse instantanée en $m.s^{-1}$ de la balle à l'instant *t*=0,5.

Lire le cours I et visionner les vidéos (cours et nombre dérivé pour bien comprendre).

Point important du cours :

Définitions :

On appelle taux de variation de *f* entre *a* et *a+h* le nombre $r(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On dit que f est **dérivable en a** lorsque le taux de variation tend vers un réel L (non infini) lorsque h prend des valeurs proches de 0.

Ce réel L est appelé le **nombre dérivé de f en a**.

Il est noté $f'(a)$. On écrit alors

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pour cette séance d'exercices, nous allons travailler essentiellement sur le calcul de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, de sa limite et donc de la dérivabilité ou non de la fonction *f* et aussi sur le fait de trouver graphiquement la valeur du nombre dérivé.

Exercice 1 : Calcul du nombre dérivé guidé

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 3x - 4$.

Soit *h* un réel non nul.

a. Calculer *f(1)*.

b. Vérifier que *f(1+h)=3h-1*.

c. En déduire que $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 3$.

d. Montrer que *f* est dérivable en 1 et donner son nombre dérivé en 1.

Exercice 2 : Calcul du nombre dérivé guidé

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 2x$.

Soit *h* un réel non nul.

a. Calculer *f(3).*

b. Vérifier que $f(3 + h) = h^2 + 8h + 15$.

c. En déduire que $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = h + 8$.

d. Calculer $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ et en déduire que *f* est dérivable en 3 et donner la valeur de son nombre dérivé en 3.

Exercice 3 :

Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne une expression, déterminer, en utilisant la définition, et si cela est possible, le nombre dérivé en 2.

1. $f(x) = 7x - 2$

2. $g(x) = \frac{1}{x}$

3. $l(x) = 4x^2 + 2$

4. $m(x) = \frac{x-1}{x+2}$

Pour l'exercice 4, faire l'activité en ligne (lien sur mon site ou à cette adresse : https://www.geogebra.org/m/khkxq6mb)

Ce qu'il faut retenir :

La valeur du nombre dérivé en un point d'abscisse a est la valeur de la pente de la tangente en ce point.

Lire la méthode sur mon site : ***Déterminer graphiquement un nombre dérivé***

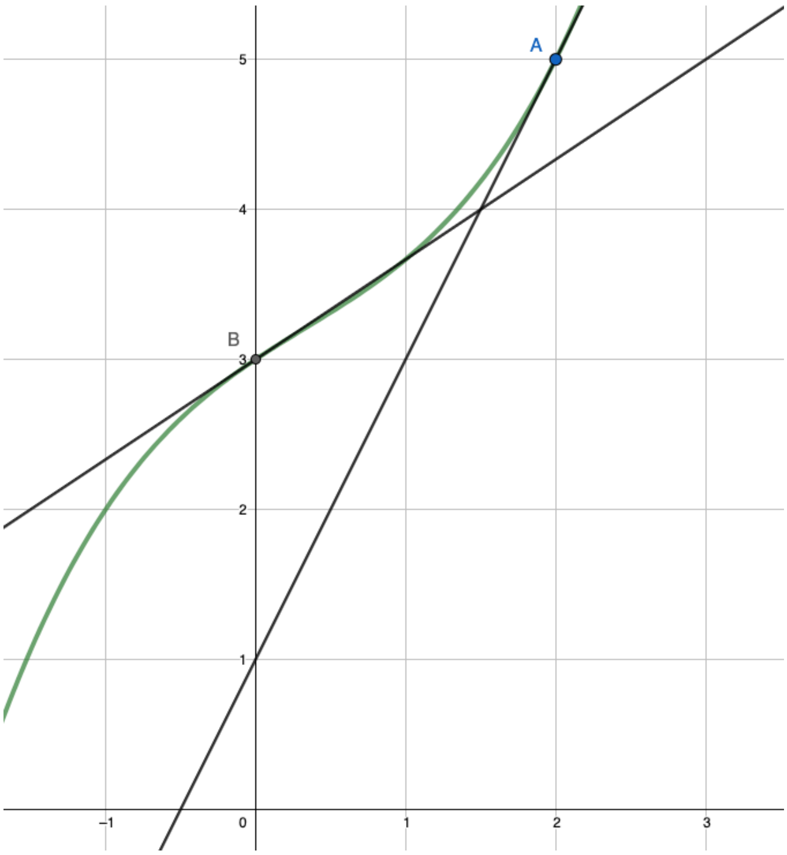
Exercice 4

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_g d'une fonction g ainsi que ses tangentes au point d'abscisses 0 et 2.

1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de *g* en 0.

2. Déterminer graphiquement *g'(2)*.

Remarque : Il s'agit de la même question, mais posée différemment... ;)



Correction :

Activité :

t	0,44	0,46	0,48	0,5	0,52	0,54	0,56
d(t)	0,95	1,04	1,13	1,23	1,32	1,43	1,54

La vitesse moyenne de la balle est égale au quotient de la distance parcourue par le temps écoulé.

1. a. Montrer que la vitesse moyenne de la balle entre 0,5s et 0,54s est égale à 5 $m.s^{-1}$(m/s).

On effectue le quotient de la distance parcourue par le temps écoulé :

$$\frac{1{,}43 - 1{,}23}{0{,}54 - 0{,}5} = 5$$

b. Montrer que la vitesse moyenne de la balle entre 0,5s et 0,52s est égale à 4,5 m.s^{-1}.

$$\frac{1{,}32 - 1{,}23}{0{,}52 - 0{,}5} = 4{,}5$$

2. On admet que la distance d(t) parcourue par la balle en fonction du tems t écoulé depuis le lâcher s'exprime par la formule
$d(t) = 4{,}9t^2$.

Soit *r* le fonction définie pour tout réel *h* non nul par $r(h) = \frac{d(0{,}5+h)-d(0{,}5)}{h}$.

a. Montrer que $r(h) = 4{,}9h + 4{,}9$.

$$r(h) = \frac{d(0{,}5+h) - d(0{,}5)}{h} = \frac{4{,}9(0{,}5+h)^2 - 4{,}9 \times 0{,}5^2}{h} = \frac{4{,}9(0{,}5^2 + 2 \times 0{,}5 \times h + h^2) - 1{,}225}{h}$$

$$= \frac{4{,}9 \times 0{,}5^2 + 4{,}9h + 4{,}9h^2 - 1{,}225}{h} = \frac{1{,}225 + 4{,}9h + 4{,}9h^2 - 1{,}225}{h} = \frac{4{,}9h + 4{,}9h^2}{h}$$

$$= 4{,}9h + 4{,}9$$

b. Calculer *r(0,1)* puis interpréter le résultat en terme de vitesse.

$$r(0{,}1) = 4{,}9 \times 0{,}1 + 4{,}9 = 5{,}39$$

Il s'agit de la vitesse moyenne entre 0,5 et 0,5+0,1=0,6.

c. Calculer *r(0,01)* puis *r(0,001)*. On arrondira les résultats, si nécessaire, à 0,001.

$$r(0{,}01) = 4{,}9 \times 0{,}01 + 4{,}9 = 4{,}949$$

$$r(0{,}001) = 4{,}9 \times 0{,}001 + 4{,}9 = 4{,}905$$

On constate que la vitesse moyenne de la balle entre 0,5 et 0,5+h se rapproche de 4,9 m.s^{-1}, quand h se rapproche de 0.

On dit que $\frac{d(0{,}5+h)-d(0{,}5)}{h}$ *a pour limite 4,9 quand h tend vers 0 et on note :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{d(0{,}5+h)-d(0{,}5)}{h} = 4{,}9.$$

Ce nombre est appelé le ***nombre dérivé de d en 0,5****, et on le note* $\boldsymbol{d'(0,5)}$*. Ainsi,* $d'(0{,}5) = 4{,}9$*.*

Exercice 1 : Calcul du nombre dérivé guidé

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$.

Soit *h* un réel non nul.

a. Calculer *f(1)*.

$$f(1) = 3 \times 1 - 4 = -1$$

b. Vérifier que *f(1+h)=3h-1*.

$$f(1 + h) = 3 \times (1 + h) - 4 = 3 + 3h - 4 = 3h - 1$$

c. En déduire que $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 3$.

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{3h - 1 - (-1)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

d. Montrer que *f* est dérivable en 1 et donner son nombre dérivé en 1.

On a donc : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3 = 3$

Le taux de variation admet une limite en 1 qui vaut 3. La fonction est donc dérivable en 1, et son nombre dérivé en 1 vaut 3 : $f'(1) = 3.$

Exercice 2 : Calcul du nombre dérivé guidé

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$.

Soit *h* un réel non nul.

a. Calculer *f(3)*.

$$f(3) = 3^2 + 2 \times 3 = 15$$

b. Vérifier que $f(3 + h) = h^2 + 8h + 15$.

$$\begin{aligned} f(3 + h) &= (3 + h)^2 + 2 \times (3 + h) = 3^2 + 2 \times 3 \times h + h^2 + 6 + 2h = 9 + 6h + h^2 + 6 + 2h \\ &= h^2 + 8h + 15 \end{aligned}$$

c. En déduire que $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = h + 8$.

$$\frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{h^2 + 8h + 15 - 15}{h} = \frac{h^2 + 8h}{h} = h + 8$$

d. Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ et en déduire que *f* est dérivable en 1 et donner la valeur de son nombre dérivé en 3.

On a donc : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h + 8 = 8$ *(lorsque h devient infiniment proche de 0, 8+h se rapproche infiniment de 8)*

Le taux de variation admet une limite en 3 qui vaut 8. La fonction est donc dérivable en 3, et son nombre dérivé en 3 vaut 8 : $f'(3) = 8$*.*

Exercice 3 :

Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne une expression, déterminer, en utilisant la définition, et si cela est possible, le nombre dérivé en 2.

1. $f(x) = 7x - 2$

On va calculer : $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{7(2+h)-2-(7\times 2-2)}{h} = \frac{7\times 2+7\times h-2-12}{h} = \frac{7h}{h} = 7$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} 7 = 7$$

La fonction est donc dérivable en 2 et $f'(2) = 7$*.*

Remarque : au début, pour simplifier un peu les calculs, on peut calculer indépendamment f(2+h) et f(2), puis les injecter dans la formule $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$*.*

2. $g(x) = \frac{1}{x}$

mise au même dénominateur

On va calculer : $\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{1\times 2}{(2+h)\times 2}-\frac{1\times(2+h)}{2\times(2+h)}}{h} = \frac{\frac{2}{(2+h)\times 2}-\frac{2+h}{2\times(2+h)}}{h} = \frac{\frac{2-(2+h)}{(2+h)\times 2}}{h} = \frac{\frac{-h}{(2+h)\times 2}}{h} = \frac{-h}{(2+h)\times 2} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{(2+h)\times 2} = \frac{-1}{4+2h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{4+2h} = \frac{-1}{4}$$

La fonction est donc dérivable en 2 et $g'(2) = \frac{-1}{4}$*.*

La difficulté vient ici du fait que nous devons faire des calculs avec fractions et mettre au même dénominateur, mais cela commence à faire de beaux calculs !

3. $l(x) = 4x^2 + 2$

On va calculer : $\frac{l(2+h)-l(2)}{h} = \frac{4(2+h)^2+2-(4\times 2^2+2)}{h} = \frac{4(2^2+2\times 2\times h+h^2)+2-18}{h} = \frac{4(4+4h+h^2)+2-18}{h} = \frac{16+16h+4h^2-16}{h} = \frac{16h+4h^2}{h} = 16 + 4h.$

$$\lim_{h\to 0} \frac{l(2+h)-l(2)}{h} = \lim_{h\to 0} 16 + 4h = 16$$

La fonction est donc dérivable en 2 et $l'(2) = 16$*.*

4. $m(x) = \frac{x-1}{x+2}$

$$\frac{m(2+h)-m(2)}{h}=\frac{\frac{2+h-1}{2+h+2}-\frac{2-1}{2+2}}{h}=\frac{\frac{1+h}{h+4}-\frac{1}{4}}{h}=\frac{\frac{(1+h)\times 4}{(h+4)\times 4}-\frac{1\times(h+4)}{4\times(h+4)}}{h}$$
$$=\frac{\frac{4+4h}{(h+4)\times 4}-\frac{h+4}{4\times(h+4)}}{h}=\frac{\frac{4+4h-(h+4)}{(h+4)\times 4}}{h}=\frac{\frac{4+4h-h-4}{(h+4)\times 4}}{h}=\frac{\frac{3h}{(h+4)\times 4}}{h}$$
$$=\frac{3h}{(h+4)\times 4}\times\frac{1}{h}=\frac{3}{(h+4)\times 4}=\frac{3}{4h+16}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{m(2+h)-m(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3}{4h+16}=\frac{3}{16}$$

La fonction est donc dérivable en 2 et $m'(2)=\frac{3}{16}$

Ce qu'il faut retenir :

La valeur du nombre dérivé en un point d'abscisse a est la valeur de la pente de la tangente en ce point.

Lire la méthode sur mon site : ***Déterminer graphiquement un nombre dérivé***

Exercice 4

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_g d'une fonction g ainsi que ses tangentes au point d'abscisses 0 et 2.

Pour cette exercice, il suffit de lire les pentes des tangentes...

1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de *g* en 0.

cf. Traits rouges

$$g'(0)=\frac{2}{3}$$

2. Déterminer graphiquement *g'(2)*.

Remarque : Il s'agit de la même question, mais posée différemment... ;)

Cf. traits bleus

$$g'(2)=\frac{4}{2}=2$$