Chapitre V
Suites

Table des matières

I. Suites numériques : généralités et modes de génération d'une suite

1. Généralités

Définition :

Une suite u de nombre réels est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la variable est un entier naturel. L'image par u d'un entier naturel n est noté u_n ou $u(n)$ et se lit « u indice n » ou « u de n ». u_n est le terme général de la suite.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

u_n est le terme de rang n de la suite.

2. Modes de génération d'une suite

2.a. Explicite

La suite (u_n) est définie par une relation $u_n=f(n)$ où f est une fonction de la variable n.

Conséquences :

- Quand une suite est définie explicitement, on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement.
- On pourra appliquer tous les outils que nous connaissons sur les fonctions comme l'étude des signes, des variations, ...

Ex. :

Considérons la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=n^2+3n$.

On remarque que $u_n=f(n)$ avec $f(x)= x^2+3x$.

On peut calculer ainsi :

$u_0=f(0)=0$, $u_1=f(1)=4$, $u_{100}=f(100)=10300$.

2.b. Par relation de récurrence

Une suite est définie par récurrence lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du terme précédent. On donne donc l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n. Ainsi :

$$\begin{cases} v_{n+1} = g(v_n) \\ v_0 = \cdots \end{cases}$$

Pour calculer la valeur d'un terme de la suite, il faut donc forcément connaître tous les termes précédents.

Méthode : Calculer le terme d'une suite définie par une relation de récurrence

On donne $\begin{cases} v_{n+1} = 3 - 2v_n \\ v_0 = 0 \end{cases}$.

Calculer le terme de rang 4 de cette suite

Correction :

$$v_1 = v_{0+1} = 3 - 2v_0 = 3 - 2 \times 0 = 3$$

$$v_2 = v_{1+1} = 3 - 2v_1 = 3 - 2 \times 3 = -3$$

$$v_3 = v_{2+1} = 3 - 2v_2 = 3 - 2 \times (-3) = 9$$

$$v_4 = v_{3+1} = 3 - 2v_3 = 3 - 2 \times 9 = -15$$

Remarque : Avec ce type de suite, on n'a **pas immédiatement** accès à n'importe quel terme, puisqu'il faut avoir au préalable calculé tous les termes précédents avant d'avoir accès à v_n.

2.c. Par un algorithme

La suite (u_n) est alors définie par son premier terme et des instructions d'une boucle Pour, qui permettent de calculer les termes suivants.

Ex. :
On considère la suite (u_n) de la méthode précédente. L'algorithme suivant permet de calculer le terme de rang N de cette suite.
La valeur u_0 est entrée dans la variable U

$U \leftarrow 0$
Pour i variant de 1 à N
  $|U \leftarrow 3 - 2 \times U$
Fin Pour

II. Sens de variations d'une suite

Définition :
Une suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier n :

$$u_{n+1} > u_n$$

Une suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier n :

$$u_{n+1} < u_n$$

Une suite (u_n) est **monotone** si lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Conséquence :
Pour étudier les variations d'une suite, nous allons avoir à notre disposition 3 méthodes à utiliser selon le type de suite que nous étudions.

- Méthode 1 : il suffit d'**étudier le signe de $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$** :
    - Si $u_{n+1} - u_n > 0$ alors $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est strictement croissante ;
    - Si $u_{n+1} - u_n < 0$ alors $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est strictement décroissante.

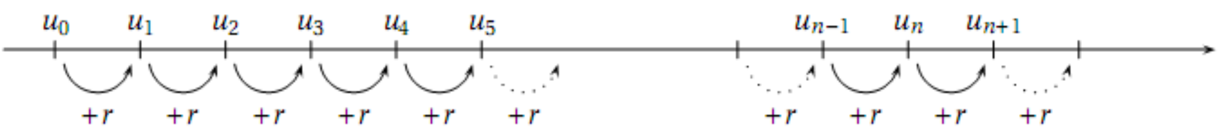
- Méthode 2 : si la suite est définie explicitement, du type $u_n = f(n)$, il suffit d'**étudier les variations de la fonction $\boldsymbol{f}$**.

- Méthode 3 : si tous les termes de la suite sont strictement positifs (attention : il faut l'avoir justifié avant d'appliquer cette méthode), il suffit de **comparer le quotient $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$ à 1** :
    - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est strictement croissante ;
    - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est strictement décroissante.

III. Suites arithmétiques

1. Généralités

Définition :
Une suite (u_n) est dite arithmétique lorsque chaque terme se déduit du précédent en ajoutant une constante réel r, appelée la raison, c'est-à-dire lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$



Ex. :
La suite 1 ;5 ;9 ;13 ;... est une suite arithmétique de raison 4.

Conséquences :

- Une suite arithmétique de raison r est strictement croissante si, et seulement si, $r>0$.
- Une suite arithmétique de raison r est strictement décroissante si, et seulement si, $r<0$.
- Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on calcule $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$, puis on montre que cette quantité est égale à une **constante indépendante de $\boldsymbol{n}$**. Cette constante sera alors la raison de la suite (u_n).

Propriété :

Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r est :

$$u_n = u_0 + n \times r.$$

Démonstration :

- *On écrit la relation de récurrence pour i=0, i=1, … jusqu'à i=n-1.*
- *La somme de tous les membres de gauche et égale à la somme de tous les membres de droite.*
- *Tous les termes entre u_1 et u_{n-1} se simplifient.*
- *On obtient l'égalité :* $u_n = u_0 + n \times r$.

Conséquence :

$$\begin{aligned} \cancel{u_1} &= u_0 + r \\ \cancel{u_2} &= \cancel{u_1} + r \\ \cancel{u_3} &= \cancel{u_2} + r \\ &\dots \\ \cancel{u_{n-1}} &= \cancel{u_{n-2}} + r \\ u_n &= \cancel{u_{n-1}} + r \end{aligned}$$

On remarque qu'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, peut s'écrire sous forme explicite :

$u_n = f(n)$ avec $f(x) = u_0 + rx$. Nous reconnaissons ici une fonction affine.

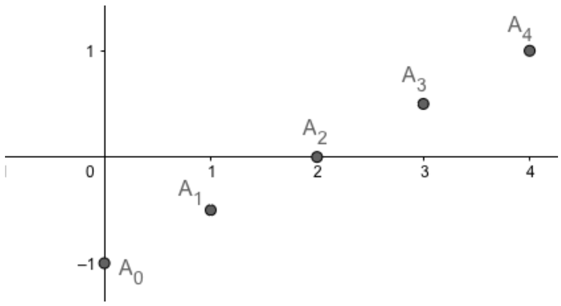
Propriété :

Lorsque la suite (u_n) est arithmétique les points $A_n(n; u_n)$ sont alignés.

Ex. :

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 =-1 et de raison $r = \frac{1}{2}$.

Alors pour tout entier n, $u_n = -1 + \frac{1}{2}n$. Les points $A_n(n; u_n)$ sont alignés sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$.



2. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété :

Pour tout $n \geq 1$:

$$\boldsymbol{1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

1+2+…+n peut aussi s'écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ qui se lit somme de k égal 1 à n de k.

Démonstration :

D'une part : $S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$

D'autre part : $S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$

On additionne les deux lignes et cela donne :

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

Autrement dit :

$$S_n = \frac{1}{2} \times \big(n \times (n+1)\big)$$

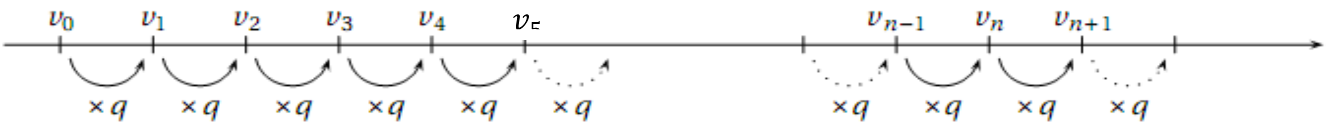
Formule générale : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \qquad (\textit{Hors Programme})$$

IV. Suites géométriques

1. Généralités

Définition :
Une suite (v_n) est dite <u>géométrique</u> lorsque chaque terme se déduit du précédent en multipliant par une constante réel q, appelée la <u>raison</u>, c'est-à-dire lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.



Ex. :
La suite 1 ;6 ;36 ;216 ;... est une suite géométrique de raison 6.

Conséquences :
- Une suite géométrique de raison q>1 est strictement croissante.
- Une suite géométrique de raison q avec 0<q<1 est strictement décroissante.
- Pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, puis on montre que cette quantité est égale à une **constante indépendante de n**. Cette constante sera alors la raison de la suite (v_n).

Propriété :
Le terme général d'une suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme v_0 est :

$$\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n}$$

Démonstration :
- *On écrit la relation de récurrence pour i=0, i=1, ... jusqu'à i=n-1.*
- *Le produit de tous les membres de gauche et égale au produit de tous les membres de droite.*
- *Tous les termes entre u_1 et u_{n-1} se simplifient.*
- *On obtient l'égalité :* $\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n}$.

Conséquence :
On remarque qu'une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, peut s'écrire sous forme explicite :

$$\begin{gathered}
\cancel{v_1} = v_0 \times q \\
\cancel{v_2} = \cancel{v_1} \times q \\
\cancel{v_3} = \cancel{v_2} \times q \\
\dots \\
\cancel{v_{n-1}} = \cancel{v_{n-2}} \times q \\
v_n = \cancel{v_{n-1}} \times q
\end{gathered}$$

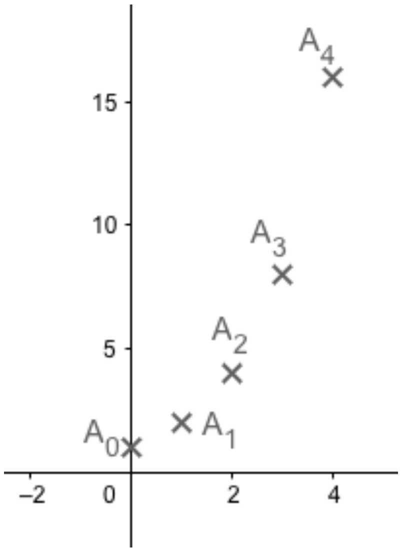
$u_n = f(n)$ avec $f(x) = v_0 \times q^x$. Une fonction de ce type est appelée exponentielle (nous l'étudierons plus tard dans l'année).

Ex. :

Soit la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q=2$, alors pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 2^n$.

Si on représente dans un repère les premiers points $A_n(n; u_n)$ on obtient le graphique ci-contre.

n	0	1	2	3	4
u_n	1	2	4	8	16



2. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété :

Pour tout $n \geq 1$, et $q \neq 1$:

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si q=1, la somme $1 + q + \cdots + q^n = n + 1$.

Démonstration :

D'une part : $S_n = 1 + q + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$

D'autre part : $qS_n = q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}$

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$$

On soustrait les deux lignes, et les simplifications permettent d'obtenir cela :

Autrement dit :

$$(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \blacksquare$$

Formule générale :

Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad (\textit{Hors Programme})$$