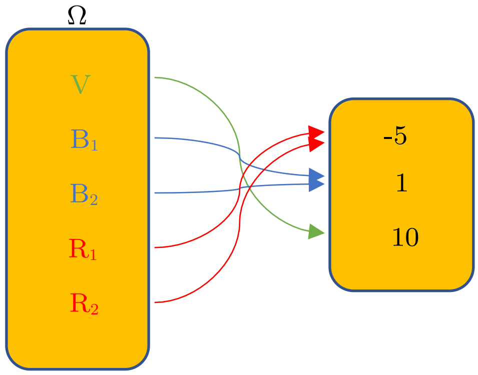
Chapitre IX
Variables aléatoires

# Table des matières

# I. Variable aléatoire réelle

## 1. modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire

Durant tout le chapitre, nous allons utiliser cette expérience.
Une urne contient une boule vert notée V, deux boules bleues notées $B_1$ et $B_2$ et deux boules rouges $R_1$ et $R_2$.
On tire une boule au hasard dans cette urne ; si on tire la boule verte, on gagne 10€ ; si on tire une boule bleue, on gagne 1€ et si on tire une boule rouge, on perd 5€.
Cette règle peut être illustrée par le schéma ci-contre.
A chaque issue de l'univers Ω, on associe un unique réel (ici le gain du joueur).




Définitions (Rappel) :

- Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une issue.
- L'**univers des possibles** est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. On le note Ω.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers des possibles. On peut le noter A ∈ Ω.
- Un **événement élémentaire** est un événement contenant une seule issue.

Définition :
Une **variable aléatoire** $X$ est une fonction qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel.

Ex. :
Dans notre exemple, la variable aléatoire modélise le gain algébrique ( négatif ou positif) du joueur, en euros. L'ensemble des valeurs prises par cette variable aléatoire est {-5 ;1 ;10}.

## 2. Évènements liés à une variable aléatoire

Définitions :
Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. On le nomme aussi univers.
Soit $X$ une variable aléatoire sur Ω et $a$ l'une des valeurs prises par $X$.
L'évènement $\{X=a\}$ est l'ensemble des issues auxquelles on associe le nombre réel $a$.
L'évènement $\{X<a\}$ est l'ensemble des issues auxquelles on associe un réel strictement inférieur à $a$.

Ex. :
Dans notre exemple, l'évènement $\{X=1\}$ est l'ensemble formé des issues $B_1$ et $B_2$.
L'évènement $\{X<0\}$ est l'ensemble des issues $R_1$ et $R_2$ puisque seul le nombre -5 est strictement inférieur à 0.

On peut aussi noter :

- $\{X=-5\}=\{R_1\,;\,R_2\}$
- $\{X=1\}=\{B_1;B_2\}$
- $\{X=10\}\ =\ \{V\}$

## 3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition :
La probabilité de l'évènement $\{X=a\}$ est la probabilité de l'évènement formé de toutes les issues auxquelles on associe le nombre $a$. On note $P(X=a)$ cette probabilité.

Ex. :
Dans notre exemple, la probabilité de l'évènement $\{X=1\}$ est celle de l'évènement $\{B_1\ ;B_2\}$ donc $P(X=1)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.
De même, $P(X<0)=P(\{R_1\ ;\ R_2\})=\frac{2}{5}$.

Définition :
Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$, c'est associer à chaque valeur $x_i$ prise par $X$ la probabilité de l'évènement $X=x_i$.

Ex. :
Pour notre exemple, nous avons $P(X=1)=\frac{2}{5}$ ; $P(X=-5)=\frac{2}{5}$ et $P(X=10)=\frac{1}{5}$.

On présente souvent la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau comme ci-dessous :

| Gain $x_i$, en € | $-5$ | $1$ | $10$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{p}(\mathrm{X}=x_i)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

Propriété :
Dans le tableau qui donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire, **la somme des probabilités est égale à 1**.
Autrement dit, sous les hypothèses précédentes,
$$p(X=x_1)+p(X=x_2)+\cdots+p(X=x_n)=1$$
On peut aussi noter :
$$\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i)=1$$
Exemple :
On a bien : $P(X=1)+\ P(X=-5)+P(X=10)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=1$.

# II. Espérance, variance et écart-type

## 1. Espérance d'une variable aléatoire

Définition :
On appelle **espérance** de la variable aléatoire $X$ le nombre
$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\times p(X=x_i)$$
Autrement dit :
$$E(X)=x_1\times p(X=x_1)+x_2\times p(X=x_2)+\cdots+x_n\times p(X=x_n)$$

L'espérance représente la valeur moyenne que l'on peut espérer obtenir si on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Ex. :
Dans notre exemple :
$$\begin{aligned}&\mathrm{E(X)}=-5\times\frac{2}{5}+1\times\frac{2}{5}+10\times\frac{1}{5}\\&=-\frac{10}{5}+\frac{2}{5}+\frac{10}{5}\\&=\frac{2}{5}\\&=0{,}4\end{aligned}$$

Conclusion : à chaque lancer, le joueur peut espérer gagner en moyenne 0,4 € environ.

## 2. Variance et écart-type

Définitions :

- On appelle variance de la variable aléatoire $X$ le nombre
$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \times p(X = x_i)$$
Autrement dit :
$$V(X) = \left(x_1 - E(X)\right)^2 \times p(X = x_1) + \left(x_2 - E(X)\right)^2 \times p(X = x_2) + \cdots + \left(x_n - E(X)\right)^2 \times p(X = x_n)$$

- On appelle écart type de la variable aléatoire $X$ le nombre
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques :

- la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire sont des indicateurs de la dispersion des valeurs prises par $X$.
- $\sigma$ est le s minuscule de l'alphabet grec et se lit « sigma ».

Ex. :
Pour notre exemple :
$$V(X) = (-5 - 0{,}4)^2 \times \frac{2}{5} + (1 - 0{,}4)^2 \times \frac{2}{5} + (10 - 0{,}4)^2 \times \frac{1}{5}$$
$$= (-5{,}4)^2 \times \frac{2}{5} + (0{,}6)^2 \times \frac{2}{5} + (9{,}6)^2 \times \frac{1}{5}$$
$$= 30{,}24$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{30{,}24} \approx 5{,}5$ *(euros)*