Chapitre I
Fonctions de variable réelle

Les fonctions comme modèles mathématiques d'évolutions continues :

- *différents modes de représentation d'une fonction : expression littérale, représentation graphique ;*
- *notations $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$;*
- *taux de variation, entre deux valeurs de la variable x, d'une grandeur y vérifiant $y = f(x)$;*
- *fonctions monotones sur un intervalle, lien avec le signe du taux de variation.*

Capacités attendues

- *Modéliser la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'une fonction.*
- *Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$ ou une inéquation de la forme $f(x) < k$ ou $f(x) > k$.*
- *Interpréter le taux de variation comme pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts*

Table des matières

I. Fonction linéaire – Fonction affine (Rappels)

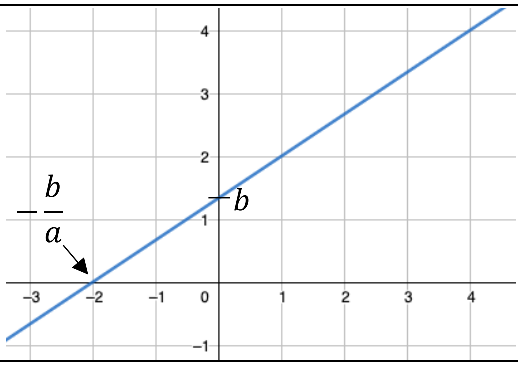
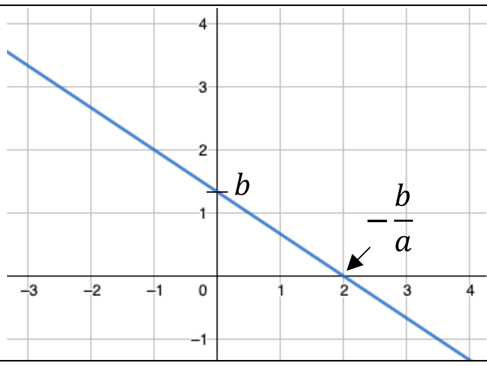
Définition

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels donnés et avec $a \neq 0$. f est une fonction **affine**.
- Dans le cas où b=0, nous avons $f(x) = ax$ avec $a \neq 0$: f est une fonction **linéaire**.

Remarques :

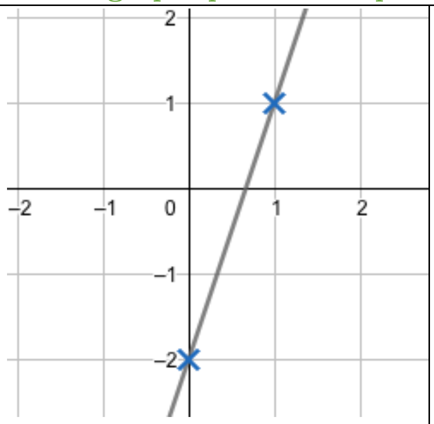
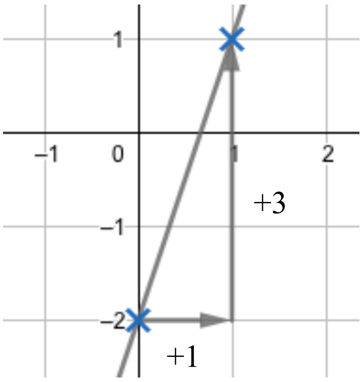
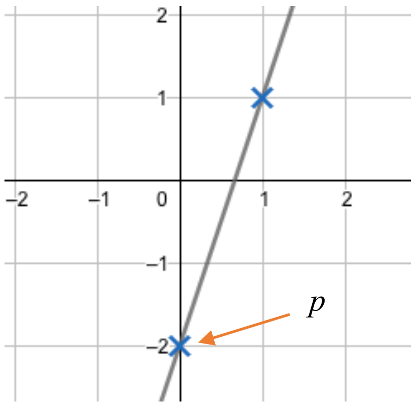
- *La courbe représentative d'une fonction affine ou linéaire est une droite.*
- *La courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.*
- *Le signe de a détermine si la droite est « montante » (croissante) ou « descendante »(décroissante).*
- *a est le coefficient directeur de la droite et b l'ordonnée à l'origine*

Synthèse :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$		
	$a > 0$	$a < 0$
Représentation graphique		
Tableau de variations	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>f</td><td>↗</td></tr></table>	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>f</td><td>↘</td></tr></table>
Signe	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td><td>⋮</td><td>$+$</td></tr></table>	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$</td><td>⋮</td><td>$-$</td></tr></table>

Méthodes :

Trouvez graphiquement l'équation d'une droite :

	*Trouver l'équation réduite d'une droite revient à trouver le m et le p, dans l'équation suivante :* $y=mx+p$
	*Pour le m (le coef. directeur), il suffit de placer les flèches comme sur le dessin ci-contre. La flèche horizontale se déplace de 1 carreau vers la gauche. Puis on trace une flèche qui ira rejoindre la droite. Cette flèche pourra monter ou descendre. On compte le nombre de carreau pour rejoindre la droite. Si c'est vers le haut, c'est positif, vers le bas… négatif.* *La formule pour trouver m est simple :* $m = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$ *Ici :* $m = \frac{+3}{+1} = 3$ *Remarque : si jamais en se déplaçant d'une carreau vers la droite, vous ne retombez pas à un croisement de carreau sur la droite, décalez-vous de 2, de 3 carreaux, et appliquez la formule…* *On sait désormais que notre droite à pour équation :* $y=3x+p$
	*Pour p, c'est plus simple… on le lit directement au croisement de la droite avec l'axe vertical des ordonnées…* *Ici, p vaut -2.* *Remarque : si on ne peut pas faire de lecture précise de p, il faut remplacer le x et le y de notre équation par les coordonnées d'un des points de la droite. Ici, on peut prendre par exemple : (1 ;1)* *On a : :* $y=3x+p$ *Donc :* $1=3 \times 1+p$ *soit* $1=3+p$*, d'où ;* $p=1-3=-2$
	L'équation de la droite est : $y= 3x-2$

Trouvez l'équation d'une droite passant par deux points :

Trouvez l'équation de la droite passant par les points de coordonnées A(-1 ;4) et B(2 ; -2).	
	On doit trouver l'équation de la droite qui est de la forme : $y=mx+p$. (m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine)
	Pour m, il y a une formule : Si les deux points ont pour coordonnées A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B) alors : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

	Cela donne ici : $4m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-4}{2-(-1)} = \frac{-6}{2+1} = \frac{-6}{3} = -2$
	On a donc : *y=-2x+p*
	Pour trouver *p* : On sait que la droite passe par le point A, donc ses coordonnées vérifie l'équation de la droite. On va donc remplacer le *x* et le *y* de l'équation par les coordonnées de A : A(-1 ;4) donc *x*=-1 et *y*=4. $4 = -2 \times (-1) + p$ soit $4 = 2 + p$ soit $4 - 2 = p$. D'où p=2.
	Ainsi l'équation de la droite est : *y=-2x+2.*

II. Généralités sur les fonctions

1. Définition

On considère *D* un intervalle de ℝ.
On définit une fonction sur *D* en associant à chaque nombre réel *x* de *D* un unique réel appelé image de *x* par *f* qui est notée *f(x)*.

Exemple ;
Soit f la fonction définie sur ℝ, qui a tout réel associe le nombre $3x - 7$.
On écrit symboliquement en mathématiques $f(x) = 3x - 7$ ou $f: x \longmapsto 3x - 7$.

Remarque :
Une fonction a différents modes de représentation : forme algébrique (comme vu ci-dessus), représentation graphique, tableau de valeurs ou sous forme d'algorithme.

2. Représentation graphique

Définition :
Soit *f* une fonction définie sur un ensemble *D*.
On appelle courbe représentative de la fonction *f* (notée C_f) dans un repère du plan, l'ensemble des points de coordonnées *(x ;y)* où $x \in D$ et $y = f(x)$.

Remarque :
Pour représenter graphiquement une fonction il est souvent plus pratique de faire un tableau de valeurs.

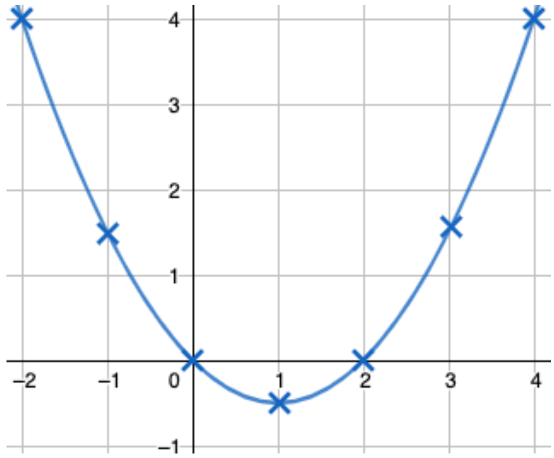
- ***Méthode : représenter graphiquement une fonction***

Faire la représentation graphique de la fonction définie sur $[-2;4]$ **par :** $f(x) = 0,5x^2 - x$.

Correction :
Pour faire cette représentation graphique nous allons faire un tableau de valeurs sur l'intervalle $[-2;4]$:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f	$0,5 \times 0,5^2 - 0,5 = 4$	1,5	0	-0,5	0	1,5	4

Nous avons les coordonnées de 7 points ((-2 ;4), (-1 ;1,5),(0 ;0) (1 ;-0,5), (2 ;0), (3 ;1,5) et (4 ;4)).



- ***Méthode : Trouver l'image d'une valeur, l'ordonnée d'un point d'abscisse donné ou l'antécédent d'une valeur.***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2$.
1. Calculer l'image de -4 par *f*.
2. Calculer l'ordonnée du point d'abscisse 2.
3. Trouvez le(s) antécédent(s) de 11 par la fonction *f*.

Correction :
1. Il suffit de trouver ce que « renvoie » notre fonction f lorsque l'on lui donne le nombre -3, c'est-à-dire remplacer x par -4 :
$f(-4) = (-4)^2 + 2 = 16 + 2 = 18$.
L'image de -3 par la fonction f est 18 ($f(-4) = 18$).
2. Il s'agit en fait de la même question que la 1. On a juste à remplacer x par 2 : $f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$.
L'ordonnée du point d'abscisse 2 est 6.
Remarque : *Cela veut dire aussi que la courbe passe par le point de coordonnées (2 ;6).*
3. Ici, il s'agit de la question inverse. Nous avons la valeur de l'image (11) est nous cherchons le ou les x qui permette(nt) d'obtenir ce résultat :
Nous voulons donc : $f(x) = 11$ c'est-à-dire : $x^2 + 2 = 11$. Cela nous fait une équation à résoudre.
$x^2 + 2 = 11$ donne : $x^2 = 11 - 2$ d'où : $x^2 = 9$.
On obtient 2 solutions : $x = \sqrt{9} = 3$ et $x = -\sqrt{9} = -3$.
11 a donc 2 antécédents avec cette fonction : -3 et 3.
Remarque : *Cela signifie que la courbe passe par les points de coordonnées (-3 ;11) et (3 ;11).*

- ***Méthode : Montrer qu'un point est sur une courbe représentative de fonction***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2$.
Le point de coordonnées (5 ;26) appartient-il à la courbe représentative de la fonction *f*.

Correction :
Pour répondre à cette question, il suffit de vérifier si oui ou non $f(5) = 26$.
Calculons $f(5)$: $f(5) = 5^2 + 2 = 25 + 2 = 27 \neq 26$. Ce point n'est donc pas sur la courbe.

III. Variations d’une fonction

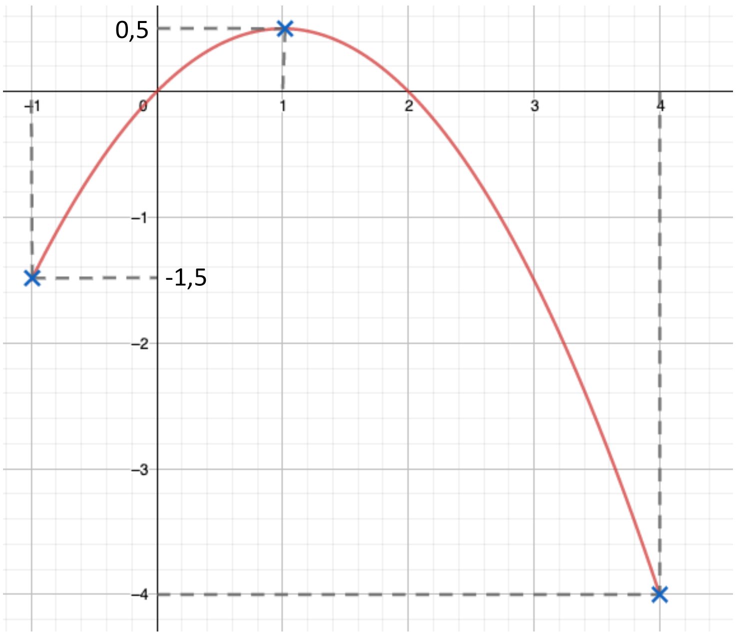
1. Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle D.

- f est une fonction strictement croissante sur D si, pour tous nombres réels a et b de D tels que $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
- f est une fonction strictement décroissante sur D si, pour tous nombres réels a et b de D tels que $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.
- f est une fonction constante sur D si, pour tous nombres réels a et b de D tels que $a < b$, alors $f(a) = f(b)$.

Remarque :
Pour représenter les variations d’une fonction on trace un tableau de variations (voir plus bas).

2. Aspect graphique



Étudions la représentation graphique suivante :

On remarque que la courbe est croissante sur l’intervalle $[-1; 1]$ puis décroissante sur $[1; 4]$.

La courbe atteint un maximum au point d’abscisse 1 qui vaut 0,5.

Voici le tableau de variations correspondant :

x	-1	1	4
Variations de f		0,5	
	-1,5		-4

Remarque :
Dans un tableau de variations, en plus de lire rapidement les différentes variations de la fonction, on peut lire les minimums et maximums atteints par la courbe.

3. Aspect algébrique – Taux de variation

A. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle D. a et b sont deux nombres réels distincts appartenant à D. Le taux de variation de f entre a et b est le nombre réel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Méthode : Calculer le taux de variation d'une fonction
Dans les 2 cas suivants, calculer le taux de variation de f entre 2 et 6.

1. $f(x) = -3x + 4$.
2. $f(x) = 3x^2 - x$

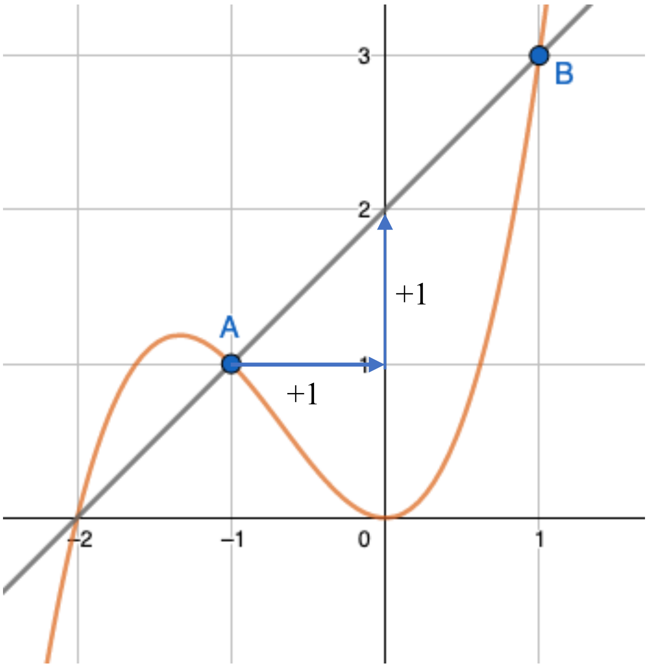
Correction :
En utilisant la formule on trouve :
1. $\frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{-3\times 6+4-(-3\times 2+4)}{4} = \frac{-14-(-2)}{4} = \frac{-12}{4} = -3$.
Autre rédaction possible :
On doit calculer : $\frac{f(6)-f(2)}{6-2}$
$f(6) = -3\times 6 + 4 = -14$
$f(2) = -3\times 2 + 4 = -2$
Donc : $\frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{-14-(-2)}{4} = \frac{-12}{4} = -3$.
Remarque : attention à ne pas oublier le – de la formule !

2. $\frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{-3\times 6^2+4-(-3\times 2^2+4)}{4} = \frac{-104-(-8)}{4} = \frac{-96}{4} = 24$.
ou : On doit calculer : $\frac{f(6)-f(2)}{6-2}$
$f(6) = -3\times 6^2 + 4 = -104$
$f(2) = -3\times 2^2 + 4 = -8$
Donc : $\frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{-104-(-8)}{4} = \frac{-96}{4} = 24$

B. Interprétation géométrique

Graphiquement, le taux de variation de f entre a et b est la pente (ou le coefficient directeur) de la droite passant par les points A et B de coordonnées A(a ;$f(a)$) et B(b ;$f(b)$).

Exemple :
Voici la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 2x^2$.



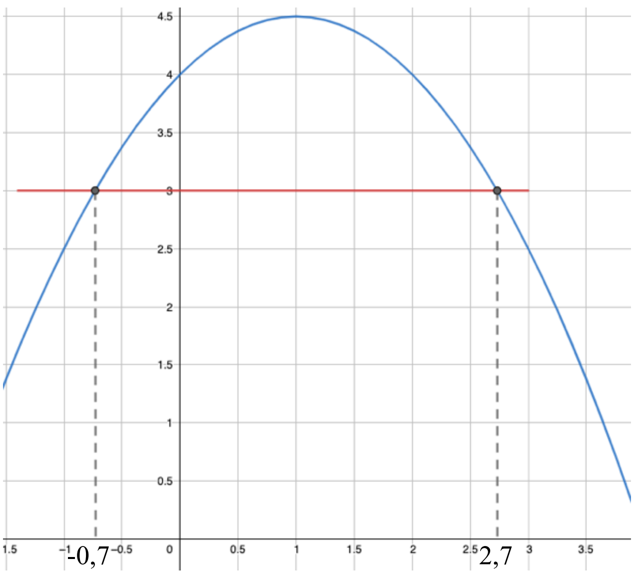
Le taux de variation de f entre -1 et 1 est la pente de la droite (AB).
Le taux de variation vaut ici : $\frac{déplacement\ vertical}{déplacement\ horizontal} = \frac{+1}{+1} = 1$

IV. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

A. Équations de la forme *f(x)=k*

Définition :
Résoudre graphiquement *f(x)=k* signifie chercher toutes les abscisses des points de la courbe représentative de la fonction f qui ont pour ordonnées le réel *k* ou aussi les abscisses des points d'intersections de la courbe avec la droite d'équation *y=k*.

Exemple :



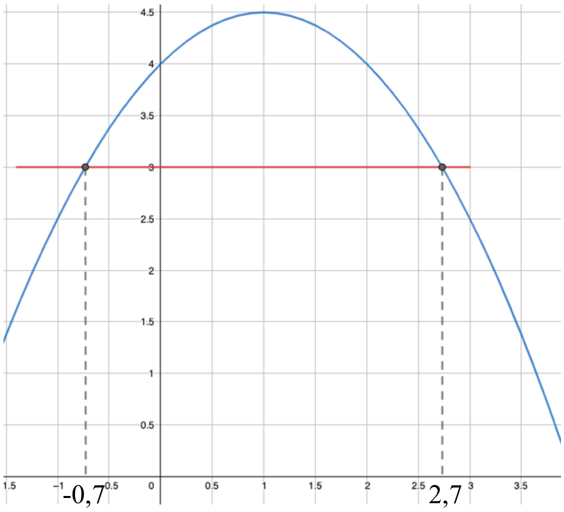
Ci-contre nous avons la courbe représentative d'une fonction f.
Si nous voulons résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$, nous traçons la droite horizontale y=3 (en rouge sur le graphique) et nous cherchons tous les points d'intersections de la courbe avec cette droite.
On trouve comme solution : -0,7 et 2,7.

B. Équations de la forme *f(x)<k ou f(x)>k*

Définition :
Résoudre graphiquement *f(x)<k* (ou *f(x)>k*) signifie chercher toutes les abscisses des points de la courbe représentative de la fonction f qui ont une ordonnées strictement inférieur (ou strictement supérieur) au réel *k*.

En pratique, nous allons chercher les abscisses (généralement sou forme d'intervalle) ou la droite est en-dessous (ou au-dessus) de la droite *y=k*.

Exemple :



Ci-contre nous avons la courbe représentative d'une fonction f. Si nous voulons résoudre graphiquement l'équation $f(x) < 3$, nous cherchons les endroits où la courbe est en-dessous de la droite y=3.

Ici, on trouve : $S =]-\infty; -0,7[\cup]2,7; +\infty[$.