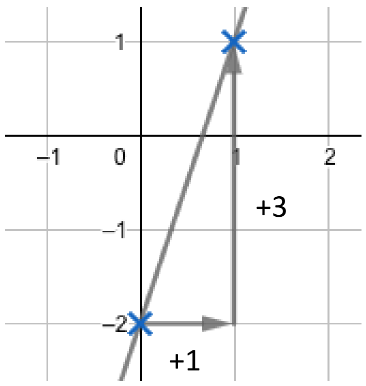
Dérivation

Table des matières

I. Taux de variation et nombre dérivé

Rappel : Pente d'une droite :



Pour trouver la pente (le coef. directeur), il suffit de placer les flèches comme sur le dessin ci-contre. La flèche horizontale se déplace de 1 carreau vers la gauche. Puis on trace une flèche qui ira rejoindre la droite. Cette flèche pourra monter ou descendre. On compte le nombre de carreau pour rejoindre la droite. Si c'est vers le haut, c'est positif, vers le bas... négatif.
La formule pour trouver m est simple :

$$m = \frac{déplacement\ vertical}{déplacement\ horizontal}$$

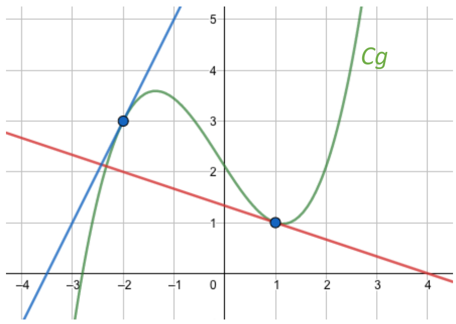
Ici :

$$m = \frac{+3}{+1} = 3$$

Remarque : si jamais en se déplaçant d'un carreau vers la droite, vous ne retomber pas à un croisement de carreau sur la droite, décalé vous de 2, de 3, et appliquez la formule...
On sait désormais que notre droite a pour équation : y=3x+p

Comment déterminer le nombre dérivé d'une fonction en un point :

Graphiquement, grâce à la lecture de la pente de la tangente au point :



Méthode : Déterminer graphiquement un nombre dérivé

On a tracé ci-contre la courbe représentative Cg d'une fonction g ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -2 et 1.

1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de g en -2.

2. Déterminer graphiquement g'(1).

Correction :

1. Le nombre dérivé de g en -2 est la pente de la tangente à *Cg au point d'abscisse -2. On cherche donc la pente de la droite bleue. Lorsqu'on « avance » d'une unité en abscisse, on doit « monter » de 2 unités en ordonnée pour retrouver la droite. La pente de la tangente est donc de 2. Ainsi le nombre dérivé de g en -2, g'(-2)=2.*

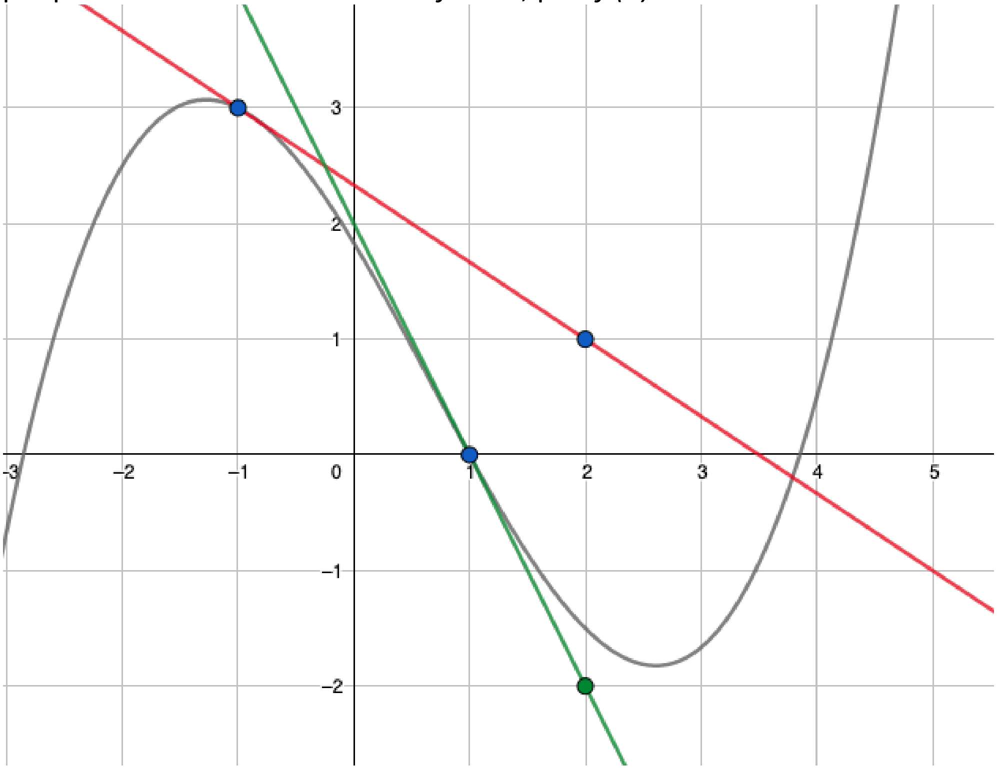
2. le nombre g'(1) est la pente de la tangente à *Cg au point d'abscisse 1. C'est donc la pente de la droite rouge. Ainsi, g'(1)=*$-\frac{1}{3}$.

À vous de jouer :

Exercice 1 :

On a tracé ci-dessous la courbe représentative *Cf* d'une fonction *f* ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -1(rouge) et 1 (vert).

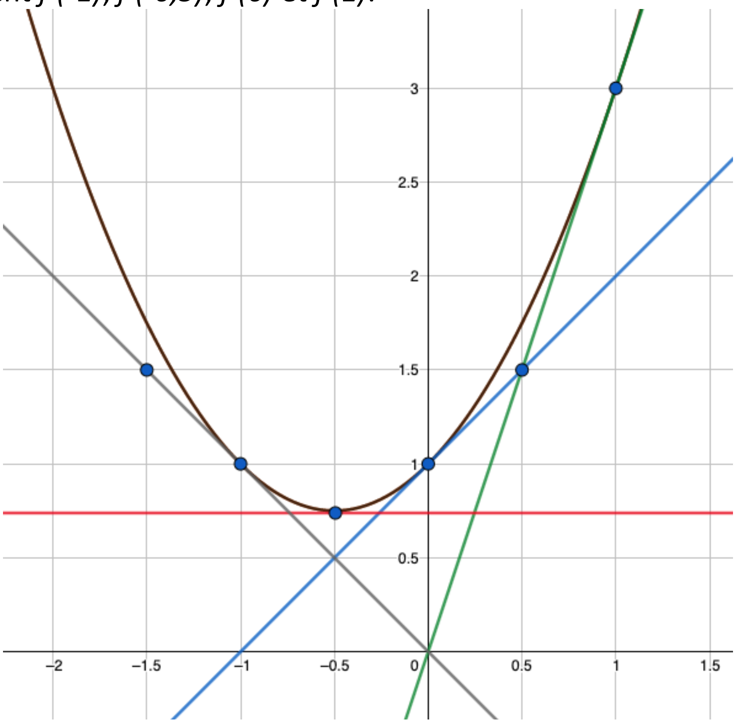
Déterminez graphiquement le nombre dérivé de *f* en -1, puis *f'(1)*.



Exercice 2 :

On a tracé ci-dessous la courbe représentative *Cf* d'une fonction *f* ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -1(gris), -0,5 (rouge), en 0(bleu) et en 1(vert).

Déterminez graphiquement *f'(-1)*, *f'(-0,5)*, *f'(0)* et *f'(1)*.



Correction :

Exercice 1 : (voir vidéo pour explication : lien)

$$f'(-1) = \frac{-2}{3}$$
$$f'(1) = \frac{-2}{1} = -2$$

Exercice 2 : (voir vidéo pour explication : lien)

$$f'(-1) = \frac{-1}{1} = -1$$
$$f'(-0{,}5) = 0$$
$$f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$
$$f'(1) = \frac{3}{1} = 3$$

Pour la suite du chapitre, nous allons déterminer l'équation de cette droite tangente :

II. tangente à une courbe en un point

Définition :

Soit f une fonction dérivable en a, et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Alors la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite passant par le point $A(a\,;f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété :

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(a\,;f(a))$ est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Méthode : Déterminer l'équation d'une tangente en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=$\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}$. Sachant que f'(1)=3, donner l'équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 1.

Correction :

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme : y=f'(1)(x-1)+f(1).

f(1)=1^2+1=2 et f'(1)=3.

D'où : y=3(x-1)+2, soit y=3x-1.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 2$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1, sachant que *f'(1)=1*.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 2x^2 - 3x$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1, puis l'équation de la tangente au point d'abscisse -2 sachant que *f'(1)=1 et f'(-2)=-11*.

Correction :

Exercice 3 : (voir vidéo pour explication : lien)

L'équation de la tangente en 1 est de la forme :

$$y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$$

Je calcule : $f(1) = 1^2 - 1 + 2 = 2$

Ce qui donne : $y = 1 \times (x - 1) + 2$

$y = x - 1 + 2.$

$y = x + 1.$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = x + 1$

Exercice 4 :

- L'équation de la tangente en 1 est de la forme :

$$y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$$

Je calcule : $f(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1$

Ce qui donne : $y = 1 \times (x - 1) - 1$

$y = x - 1 - 1.$

$y = x - 2.$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = x - 2.$

- L'équation de la tangente en -2 est de la forme :

$$y = f'(-2) \times (x - (-2)) + f(-2)$$

Je calcule : $f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) = 14$

Ce qui donne : $y = -11 \times (x + 2) + 14$ *(Ici, le –(-2) a été remplacé par +2)*

$y = -11x - 11 \times 2 + 14.$ *(J'ai effectué la distributivité de -11 à toute la parenthèse)*

$y = -11x - 22 + 14$ soit $y = -11x - 8.$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = -11x - 8.$

III. Fonction dérivée

III.1. Dérivée de fonctions usuelles (lien vidéo)

Fonction	fonction	Fonction dérivée : $f'(x)$
Constante	$f(x) = k$	0
Identité	x	1

Carré	x^2	$2x$
Cube	x^3	$3x^2$
Puissance	x^n	nx^{n-1}

Type d'opération	**Fonction à dériver**	**Fonction dérivée**
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un réel	$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$

Méthode : Calculer la dérivée d'une fonction polynôme
Calculer la dérivée de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : *f(x)=4x³-5x²+2x-1.*

Correction :
On a f(x)=h(x)+i(x)+j(x)+k(x), avec h(x)= 4x³, i(x)=-5x², j(x)=2x et k(x)=-1.
Ainsi, f'(x)=h'(x)+i'(x)+j'(x)+k'(x) avec h'(x)=$4 \times 3x^2 = 12x^2$*, i'(x)=*$-5 \times 2x = -10x$*, j'(x)=2 et k'(x)=0.*
Par conséquent, pour tout réel x, f'(x)= $12x^2 - 10x + 2$.

Exercice :

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x + 5$, on a $f'(x) =$
$g(x) = x^2 + 5x$, on a $g'(x) =$
$h(x) = 5x^2 + 2x + 7$, on a $h'(x) =$
$i(x) = 2x^3 - 5x^2 + 10x - 25$, on a $i'(x) =$

Correction: (Lien vidéo correction : lien)

Pour les fonctions polynômes, souvenez-vous qu'il faut descendre la puissance près du x et descendre la puissance du x d'un « cran » : Ainsi, si $f(x) = x^5$*, on descend le 5 et la puissance du x passe de 5 à 4 :* $f'(x) = 5x^4$*. La dérivée d'un nombre vaut 0.*

$f'(x) = 3 + 0 = 3$

$g'(x) = 2x + 5$

$h'(x) = 5 \times 2x + 2 = 10x + 2$

$i'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 10$

III.2 Applications de la dérivation : lien entre sens de variation et signe de la dérivée (lien 1 et lien 2)

Variations d'une fonction

Propriétés (admises) :
Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I et sa dérivée *f'* sur I.
(1) Si pour tout réel x de I, on a $f'(x) \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
(2) Si pour tout réel x de I, on a $f'(x) \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

Réciproquement :
(1) Si f est croissante sur I, alors, pour tout réel x de I, on a $f'(x) \geq 0$.
(2) Si f est décroissante sur I, alors, pour tout réel x de I, on a $f'(x) \leq 0$.

Conséquence :
Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle I, il suffit d'étudier le signe de sa fonction dérivée sur I. Pour cela, on procède ainsi :

1) Calcul de la fonction dérivée f'
2) Étude du signe de $f'(x)$ sur I
3) Construction du tableau de variations :

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

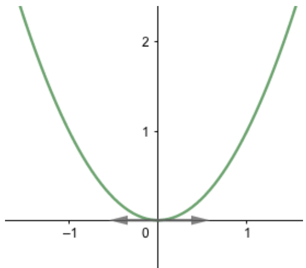
Extremums d'une fonction

Définition :
Un extremum est soit un minimum, soit un maximum.

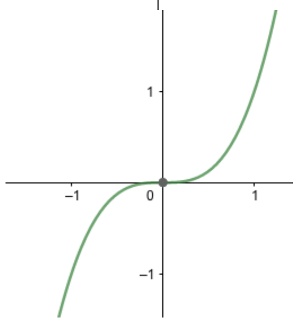
Propriété (admise) :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.
Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

Ex. :

- La fonction carré a une dérivée qui s'annule en 0 en changeant de signe puisque f'(x)=2x, donc f admet un extremum local en 0.



- La fonction cube a une dérivée qui s'annule en 0 mais ne change pas de signe en 0 ($g'(x)=3x^2$). La fonction cube n'admet donc pas d'extremum local en 0.



3. Méthode : étude des variations d'une fonction

Fonction du 2nd degré :

Déterminer les variations et le minimum de la fonction f définie sur $]-\infty;+\infty[$ par :

$$f(x) = -3x^2 - 12x + 6$$

Correction:

$$f'(x) = -2 \times 3x - 12 \times 1 + 0 = -6x - 12$$

Étudions le signe de cette dérivée : dans un tableau de signes en mettant en dessous le tableau de variation :

$-6x - 12 > 0$
$-6x > 12$
$x < \frac{12}{-6}$ *(attention à bien inverser le signe d'inégalité car on divise par un nombre négatif)*
$x < -2$
Autre façon de faire :
On sait que les expressions de la forme ax+b sont du signe de a pour x>$\frac{a}{b}$.
Donc ici, -6x-12 est du signe de a (donc -) si x est supérieur à $\frac{-(-12)}{-6} = \frac{12}{-6} = -2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		↘	18	↗	

On voit que le minimum de la fonction est 18, pour x=-2.

Fonction du 3ème degré :

Soit la fonction f définie sur $[-5; 5]$, par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$.
1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Montrer que la fonction dérivée est égale à : $f'(x) = 6(x+2)(x-3)$.
3. En déduire les variations, le minimum et le maximum de la fonction sur $[-5; 5]$.

Correction :
1. $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 36 = 6x^2 - 6x - 36$.

2. Pour cela, nous allons développer $6(x+2)(x-3)$.
$6(x+2)(x-3) = 6(x^2 - 3x + 2x - 6) = 6(x^2 - x - 6) = 6x^2 - 6x - 36 = f'(x)$.

3. Nous allons étudier le signe de f', puis en déduire les variations de f.
$f'(x) = 6(x+2)(x-3)$.
Nous allons étudier le signe de x+2 puis le signe de x-3, et enfin faire un tableau de signes pour synthétiser cela.
x+2>0 pour x>-2.
x-3>0 pour x>3.

x	*-5*		*-2*		*3*		*5*
signe de 6		+			+		
Signe de x+2		−	0		+		
Signe de x-3				−	0	+	
Signe de f'(x)		+	0	−	0	+	
Variations de f	-139	↗	50	↘	-75	↗	1

On lit que le maximum de la fonction est 50 pour x=-2 et le minimum -139 pour x=-5.

IV. Exercices :

Exercice 1 :

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
1. Calculer la fonction dérivée *f'* de cette fonction.
2. Étudier le signe de *f'(x)*.
3. Faites le tableau de variations de la fonction *f*.

Exercice 2 :

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$.
1. Calculer la fonction dérivée *f'* de cette fonction.
2. Montrer que f' peut se mettre sous la forme : $f'(x) = 2(x-1)(x+2)$.
3. Étudier le signe de *f'(x)*.
4. Faites le tableau de variations de la fonction *f*.

Problème 1 :

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Le montant des charges correspondant à la fabrication de *x* pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 25] par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100$$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. Donner l'ensemble d'étude pour les fonctions de notre problème :
2. Exprimer *R(x)* qui représente la recette de cette entreprise.
3. On note *B* la fonction bénéfice, exprimée en euros. Exprimer *B(x)*.
4. On note *B'* la fonction dérivée de la fonction *B*.

Calculer B*'(x)*, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 25].

5. Montrer que B' peut se mettre sous la forme : $B'(x) = -3(x-3)(x-17)$

6. Dressez le tableau de signes de B' et en déduire le tableau de variations de B (voir ci-dessous).

Problème 2 :

On désigne par *x* le nombre de kilogramme de truffes traités chaque semaine et par *f(x)* le coût unitaire de revient (la somme des charges engagées pour la production d'un bien ou d'un service) en euros.

Chaque kilogramme de truffes conditionné est vendu 450€.

On admet, dans la suite du problème, que la fonction f est définie sur]0 ;45] par : $f(x) = x^2 - 60x + 975$.

a. Justifier que le coût de production total C(x) pour x kilogramme de truffes est : $C(x) = x^3 - 60x^2 + 975x$.

b. Calculer la recette R provenant de la vente de *x* kilogrammes de truffes.

c. Exprimer le bénéfice B réalisé par le producteur pour *x* kilogrammes de truffes conditionnés et vendus.

d. Déterminer la fonction dérivée B' de la fonction B et montrer que : $B'(x) = (-3x + 15)(x - 35)$.

e. Étudier le signe de B'(*x*). En déduire le tableau de variation de la fonction B.

f. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
B(x)										

g. Représenter la fonction B dans un repère orthogonal (O,I,J) (unités : 1 cm pour 5 kg en abscisse et 1 cm pour 1000€ en ordonnées.

h. À l'aide du graphique, déterminer pour quelles productions de truffes l'exploitation est bénéficiaire.

i. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

x	
Signe de -3	
Signe de x-3	
Signe de x-17	
Signe de B'(x)	
Variations de B(x)	

7. Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal?

Correction :

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
1. Calculer la fonction dérivée f' de cette fonction.
2. Étudier le signe de *f'(x)*.
3. Faites le tableau de variations de la fonction f.

1. $f'(x) = 2 \times 2x - 3 = 4x - 3$
2. *4x-3* est du signe de *a* (donc +) si x est supérieur à $\frac{-(-3)}{4} = \frac{3}{4}$.
3.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f	↘		-0,125		↗

Exercice 2 :

1. $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 12 = 6x^2 + 6x - 12$.
2. $6(x-1)(x+2) = 6(x^2 + 2x - x - 2) = 6(x^2 + x - 2) = 6x^2 + 6x - 12 = f'(x)$.
3. et 4.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de 6				+			
Signe de x+2		−	0		+		
Signe de x-1				−	0	+	
Signe de f'(x)		+	0	−	0	+	
Variations de f	↗		22	↘	-5	↗	

Problème :

1. La production variant entre 0 et 25, nous étudierons la fonction sur $[0; 25]$.

2. Chaque pièce vendu rapporte 247€. Si l'entreprise en vend x, cela rapportera $247 \times x$.
D'où : $R(x) = 247x$.

3. Le bénéfice est la recette – les coûts.
$B(x) = 247x - (x^3 - 30x^2 + 400x + 100)$ Ne pas oublier les parenthèses pour le coût !
$B(x) = 247x - x^3 + 30x^2 - 400x - 100 = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$.

4. $B'(x) = -3x^2 + 60x - 153$

5. $-3(x-3)(x-17) = -3(x^2 - 17x - 3x + 51) = -3x^2 + 51x + 9x - 153 = -3x^2 + 60x - 153 = B'(x)$.

6. Dressez le tableau de signes de B' et en déduire le tableau de variations de B.

x	0		3		17		25
Signe de -3		−		−		−	
Signe de x-3		−	0	+		+	
Signe de x-17		−		−	0		
Signe de B'(x)		−	0	+	0	−	

	-100	↘		↗	1056	↘	

Variations de B			-800

6. Le bénéfice maximal est obtenu pour 17 pièces produites/vendus par jour. Le bénéfice est alors de 1056 €.