Chapitre XI

Vecteurs dans un repère (2s)

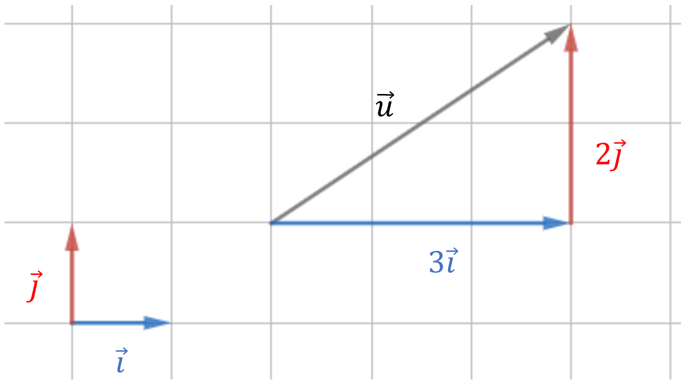
Table des matières

I. Coordonnées d'un vecteur dans une base Lien vidéo :[lien]

Définitions :

- Une base de vecteurs est un couple $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$de deux vecteurs non nuls qui n'ont pas la même direction.
- Une base est orthonormée si les directions des vecteurs sont perpendiculaires et si la norme (la longueur) des deux vecteurs est égale à 1.

Propriété et définition :
Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ une base orthonormée.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels $(x\,;y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
On dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.
On note $\vec{u}\,(x\,;y\,)$ ou $\vec{u}\,\binom{x}{y}$.
x est l'abscisse de $\vec{u}$ et y son ordonnée.



Ici, $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.
Donc $\vec{u}\,\binom{3}{2}$.

Remarque :
Dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$, on a $\vec{0}\,\binom{0}{0}$, $\vec{\imath}\,\binom{1}{0}$ et $\vec{\jmath}\,\binom{0}{1}$.

Propriétés :
Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ une base orthonormée du plan et k un nombre réel.
Si $\vec{u}\,\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\,\binom{x'}{y'}$, alors

- $\vec{u} + \vec{v}\,\binom{x+x'}{y+y'}$
- $\vec{u} - \vec{v}\,\binom{x-x'}{y-y'}$
- $k\vec{u}\,\binom{kx}{ky}$

Démonstration (guidée) :
Soit $\vec{u}\,\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\,\binom{x'}{y'}$dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.
1. Écrire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
2. Déterminer $\vec{u} + \vec{v}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et en déduire les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$.
3. Démontrer de même les formules donnant les coordonnées de $\vec{u} - \vec{v}$ et de $k\vec{u}$ pur tout nombre k.

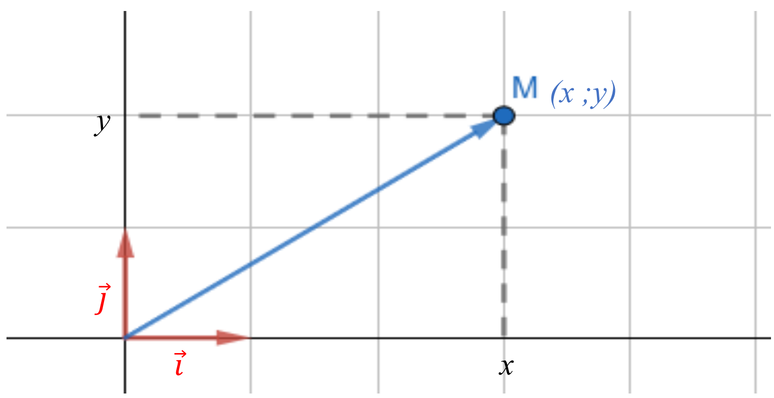
Exemple :
Pour $\vec{u}\,\binom{2}{1}$ *et* $\vec{v}\,\binom{-4}{3}$, on a $\vec{u} + \vec{v}\,\binom{2+(-4)}{1+3}$ soit $\binom{-2}{4}$; $-3\vec{u}\,\binom{-3\times 2}{-3\times 1}$ soit $\binom{-6}{-3}$.

II. Formules de géométrie repérée

Définitions :

- Un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est formé d'un point O (origine du repère) et d'une base orthonormée $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
- Pour tout point M du plan, le couple de coordonnées de M dans le repère $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est le couple $(x\,;y\,)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ ou encore $\overrightarrow{OM}\,\binom{x}{y}$.

Sur la figure ci-contre, on a $\overrightarrow{OM} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, donc M a pour coordonnées (3 ;2).



Propriétés (coordonnées d'un vecteur) :
Pour tous point A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$.
Remarque : n'oubliez pas que dans la formule c'est extrémité – origine !

Démonstration :
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(x_A\vec{\imath}+y_A\vec{\jmath})+(x_B\vec{\imath}+y_B\vec{\jmath})=(x_B-x_A)\vec{\imath}+(y_B-y_A)\vec{\jmath}$. *D'où les coordonnées de* $\overrightarrow{AB}$.

Exemple :
Soit A(1 ;3) et B(2 ;-5). Les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ sont $\binom{2-1}{-5-3}$ soit $\binom{1}{-8}$.

Propriété (norme d'un vecteur) :
Soient, dans une base orthonormée $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, le vecteur $\vec{u}\,(x\,;y\,)$, les points A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B).
La norme (longueur) de vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est : $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Exemple :
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ $\binom{1}{-8}$ est : $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{1^2+(-8)^2}=\sqrt{65}\approx 8{,}06$.

Propriété (milieu d'un segment) :
Soit, dans un repère, les points A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B).
Les coordonnées du milieu du segment [AB] sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

III. Vecteurs colinéaires

Lien vidéo : lien

Définition (Rappel chap. VII) :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

Dans une base, pour étudier la colinéarité de deux vecteur non nuls $\vec{u}$ $\binom{x}{y}$ et $\vec{v}$ $\binom{x'}{y'}$, on peut déterminer s'il existe un réel k tel que $x'=kx$ et $y'=ky$.

Méthode :
Soient les vecteurs $\vec{u}$ $\binom{5}{2}$ et $\vec{v}$ $\binom{35}{14}$.
Montrer qu'ils sont colinéaires.

Correction :
On remarque que $35=7\times 5$ *et* $14=7\times 2$. *On a donc* $\vec{v}=7\vec{u}$ *et donc* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*

Propriété :
Soit, dans une base, les vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y\,)$ *et* $\vec{v}\,(x'\,;y'\,)$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy'-x'y=0$.

Démonstration :
Nous voulons montrer que :
$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires* $\Leftrightarrow xy'-x'y=0$.
Nous allons donc devoir démontrer l'implication dans les deux sens.

- *Si les deux vecteurs sont non nuls :*

Sens $\Longrightarrow$ *:*
$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires donc il existe un réel k tel que* $\vec{v}=k\vec{u}$ *et donc tel que* $x'=kx$ *et* $y'=ky$.
Par conséquent, $xy'-x'y=x(ky)-(kx)y=kxy-kxy=0$.

Sens $\Leftarrow$ *:*

On a $xy' - x'y = 0$ et donc $xy' = x'y$.

Comme $\vec{u}$ *est non nul, l'une de ses coordonnées, par exemple x, est différente de 0.*

Posons k tel que $k = \frac{x'}{x}$ *on a donc x'=kx.*

Comme par hypothèse, xy'=x'y, on obtient xy'=(kx)y=kxy. Comme x est différent de 0, on peut simplifier par x.

On a donc : y'=ky

Par conséquent $\vec{v} = k\vec{u}$ *: les vecteurs sont donc colinéaires.*

- *L'un des vecteurs est le vecteur nul.*

Sens $\Rightarrow$ *:*

Posons que $\vec{v}$ *soit le vecteur nul.*

Alors, $xy' - x'y = x \times 0 - 0 \times y = 0$.

Sens $\Leftarrow$ *:*

Comme $\vec{v}$ *est le vecteur nul et que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan,* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*

Méthode :

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}16\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}49\\10\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

Correction :

En utilisant la formule :

$16 \times 10 - 49 \times 3 = 160 - 147 = 13 \neq 0$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

Définition :

Soit, dans une base $\mathscr{B}$, les vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y\,)$ *et* $\vec{v}\,(x'\,;y'\,)$.

Le nombre $xy' - x'y$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\mathscr{B}$.

On le note : det($\vec{u}$; $\vec{v}$) ou encore $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Propriété :

Soit, dans une base $\mathscr{B}$, les vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y\,)$ *et* $\vec{v}\,(x'\,;y'\,)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si det($\vec{u}$; $\vec{v}$)=0.

Méthode :

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}20\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}30\\9\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

Correction :

det($\vec{u}$; $\vec{v}$)$=20 \times 9 - 30 \times 6 = 180 - 180 = 0$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

Applications :

Propriétés :

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Pour démontrer que des points sont alignés ou que des droites sont parallèles dans un repère orthonormé, il pourra être très intéressant d'utiliser le déterminant.

Méthode :

Dans un repère, on considère les points A(-8 ; 8), B(3 ; 1), C(-4 ; 2), D(4 ; -3) et E(-8 ; $\frac{9}{2}$).

1. Les points E, C et D sont-ils alignés ? Justifier.
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Justifier.

Correction :
1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{ED}$.

$\overrightarrow{EC}(-4-(-8);2-\frac{9}{2})$ soit $\overrightarrow{EC}(4;-\frac{5}{2})$
$\overrightarrow{ED}(4-(-8);-3-\frac{9}{2})$ soit $\overrightarrow{ED}(12;-\frac{15}{2})$
à partir de là, on peut :

- Remarquer que l'on a $\overrightarrow{ED}=3\overrightarrow{EC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ *et* $\overrightarrow{ED}$ *sont colinéaires et donc les points E, C et D sont alignés.*
- Ou calculer det($\overrightarrow{EC}$ *;* $\overrightarrow{ED}$*)=*$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} = 4\times-\frac{15}{2}-12\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-30+30=0.$ Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ *et* $\overrightarrow{ED}$ *sont colinéaires et donc les points E, C et D sont alignés.*

2. On calcule les coordonnés de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{AB}(3-(-8);1-8)$ *soit* $\overrightarrow{AB}(11;-7)$.
$\overrightarrow{CD}(4-(-4);-3-2)$ soit $\overrightarrow{CD}(8;-5)$.
det($\overrightarrow{AB}$ *;* $\overrightarrow{CD}$*)=*$\begin{vmatrix} 11 & 8 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = 11\times(-5)-8\times(-7)=-55+56=1\neq 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ *ne sont pas colinéaires, donc (AB) n'est pas parallèle à (CD).*