Chapitre XIII

Représenter et caractériser les droites du plan (2s)

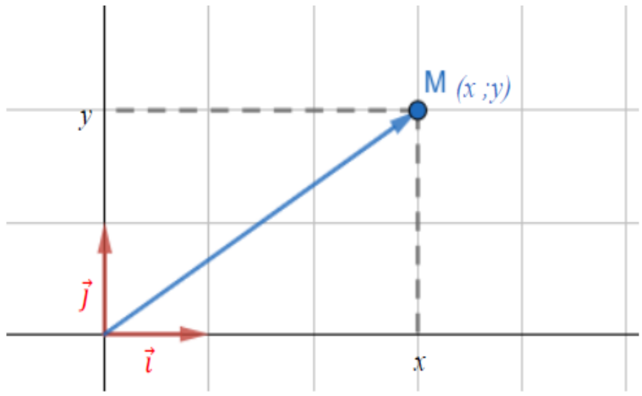
Table des matières

Rappel :

- Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé

Pour tout point M du plan, le couple de coordonnées de M dans le repère $(O;\, \vec{\imath};\, \vec{\jmath})$ est le couple (x, y) tel que :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ ou $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

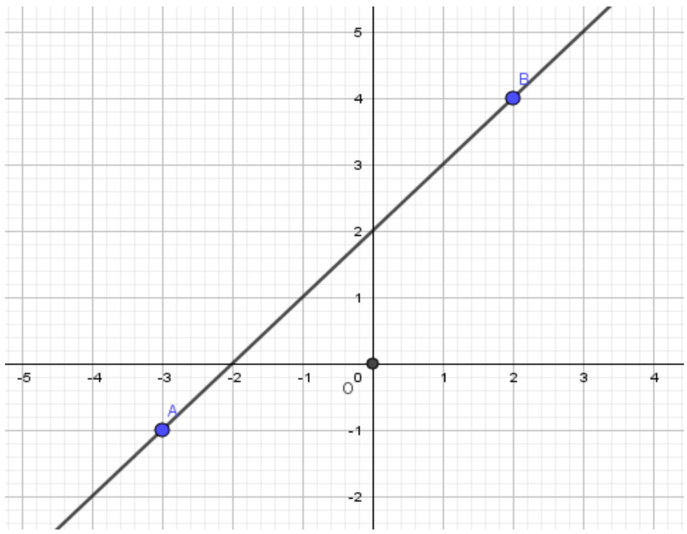


Pour tout point A $(x_A;\, y_A)$ et B $(x_B\,;\, y_B)$ dans un repère orthonormé, le vecteur a pour coordonnées $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

- Equation d'une droite dans un repère orthonormé :

$y = mx + p$ ou $y = ax + b$

ex : $y = x + 2$



I. Vecteurs directeurs d'une droite

Lien vidéo : lien

1. Définition

Définition :
Soit (d) une droite du plan. Un vecteur directeur d'une droite (d) est un vecteur non nul qui possède la même direction que la droite (d).

Remarques :

- En pratique pour trouver un vecteur directeur d'une droite, il nous suffira de prendre 2 points A et B distincts sur cette droite et de calculer ce vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui sera un vecteur directeur de cette droite.
- On pourra dorénavant définir une droite par un point et un vecteur directeur.

2. Équations de droite

2.a. Équation réduite

Définition :
Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\, \vec{\imath};\, \vec{\jmath})$, l'équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $y = mx + p$. (les nombres m et p sont appelées respectivement coefficient directeur (ou pente) et ordonnée à l'origine de la droite).

L'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (droite verticale) est de la forme : $x = p$.

Propriété :
Dans un repère orthonormé du plan, la droite d'équation $y=mx+p$ (m et p étant des réels) admet pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{m}$.

Ex. :
La droite d'équation $y=-4x+5$ admet comme vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{-4}$.

2.b. Équation cartésienne

Définition :
Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, l'équation cartésienne d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $ax+by+c=0$. (les nombres a, b et c étant des réels).

Remarque :
Une droite (d) admet une infinité d'équations cartésiennes. En effet, si est une équation cartésienne de (d), alors pour tout réel k non nul, $kax+kby+kc=0$ est une autre équation de la même droite.

Ex. :
Si $2x-3y+5=0$ est une équation cartésienne de la droite *(d)*, alors en multipliant par 3 cette équation, nous obtenons une autre équation cartésienne de cette même droite : $6x-9y+15=0$.

Propriété :
Dans un repère orthonormé du plan, la droite d'équation $ax+by+c=0$. (les nombres a, b et c étant des réels) admet pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

Méthode : Trouver l'équation d'une droite passant par 2 points.
Déterminer l'équation cartésienne d'une droite connaissant deux points distincts de la droite
Soit $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite *(d)* passant par les points A (5 ; 13) et B (10; 23).

Correction :
L'équation cartésienne de la droite (d) est de la forme : $ax+by+c=0$.
Les points A et B appartiennent à la droite (d) donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.
$\overrightarrow{AB}$ (10 – 5 ; 23 – 13), soit $\overrightarrow{AB}$ (5 ; 10)
En divisant les coordonnées du vecteur par 5, nous obtenons le vecteur $\vec{u}$ (1 ; 2) vecteur directeur aussi de la droite (d) (cela nous simplifiera les calculs).
Donc $b = -1$ et $a = 2$
Une équation cartésienne de la droite d est donc de la forme : $2x-y+c=0$.
Comme le point A (5 ; 13) appartient à la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation : $2 \times 5 - 13 + c = 0$
D'où : $c = 3$
Une équation cartésienne de la droite d est donc : $2x-y+3=0$.

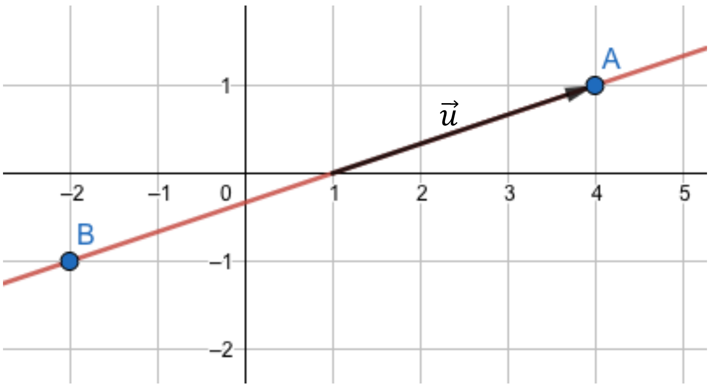
Méthode : Trouver l'équation d'une droite avec un point et un vecteur directeur.
Donner l'équation réduite et une équation cartésienne de la droite *(d)* passant par le point A(2 ;5) et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{4}{3}$.

Correction

Soit M un autre point de la droite avec M(x ;y).
Alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ **et** $\vec{u}$ *sont colinéaires. Donc det(*$\overrightarrow{AM}$; $\vec{u}$*)=0.*
$\overrightarrow{AM}(x-2; y-5)$
$det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = \begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ y-5 & 3 \end{vmatrix} = (x-2)\times 3 - (y-5)\times 4 = 3x - 6 - 4y + 20 = 3x - 4y + 14 = 0$
Nous avons ainsi déjà une équation cartésienne de la droite (d) : $3x - 4y + 14 = 0$.
Pour l'équation réduite :

$$3x - 4y + 14 = 0$$
$$-4y = -3x - 14$$
$$y = \frac{-3}{-4}x - \frac{14}{-4}$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$$

Méthode : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de sa représentation graphique Soit $(O\,; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite *(d)*, tracée ci-dessous :



Correction :
Méthode 1 : Le vecteur $\vec{u}$ *est un vecteur directeur de la droite (d)*
On lit graphiquement $\vec{u}$*(3 ; 1). Donc a = 1 et b = -3*
Une équation cartésienne de la droite d est de la forme : x-3y+c=0
Comme le point A (4 ; 1) appartient à la droite (d), ses coordonnées vérifient l'équation :
$4 - 3\times 1 + c = 0$ *d'où c=-1*
Une équation cartésienne de la droite d est : -x+3y-1=0

Méthode 2 : On prend deux points de la droite, par exemple : A (4 ; 1) et B (-2 ; -1) et on applique la même méthode qu'à la méthode : Trouver l'équation d'une droite passant par 2 points.

II. Droites parallèles et droites sécantes

1. Droites parallèles

Propriétés :
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Soient *m*, *p*, *m'* et *p'* des réels.
  Dans un repère du plan, les droites d'équation *y=mx+p* et *y=m'x+p'* sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente (*m=m'*)

Conséquence :
Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles on pourra soit montrer que det($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$)=0, ou montrer que leur pente est la même selon les informations que nous avons.

2. Droites sécantes et système d’équations

2. a. Définition et propriétés

Définition :
Deux droites non parallèles sont dites sécantes.

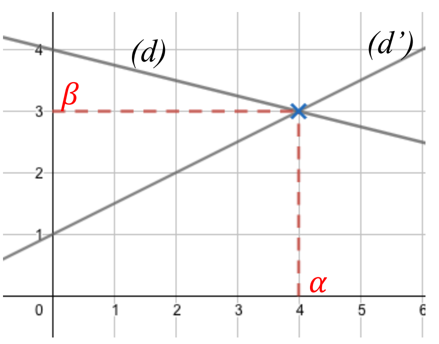
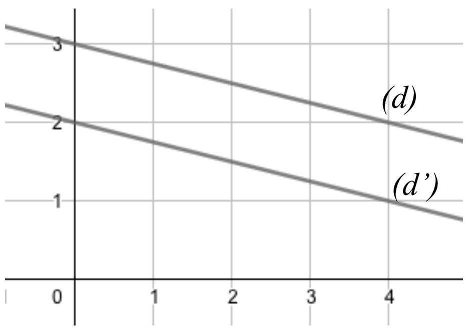
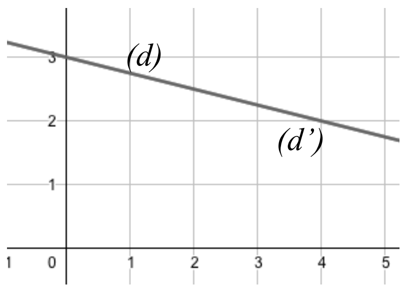
Propriété :
Deux droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

Conséquence :
Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont sécantes on pourra montrer que det($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$)≠0.

A partir de là, il va être intéressant de trouver le point d’intersection de nos droites.

Propriétés :

- Si les droites *(d)* et *(d’)* sont sécantes, alors les coordonnées de leur point d’intersection est l’unique couple solution du système formé par une équation de *(d)* et une équation de *(d’)*.
- Résoudre le système (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, revient à étudier l’intersection de deux droites du plan.
  Le système (S) admet soit une unique solution, soit aucune solution, soit une infinité de solution.

(d) et *(d’)* sont sécantes. Le système admet une unique solution : le couple $(\alpha;\beta)$.	*(d)* et *(d’)* sont strictement parallèles. Le système n’admet aucune solution.	*(d)* et *(d’)* sont confondues. Le système admet une infinité de solutions.
		

2. b. Système de deux équations linéaires à deux inconnues

Soit *(d)* la droite d'équation $x-3y+1=0$ et *(d')* la droite d'équation $-3x+4y+2=0$.
Un vecteur directeur de *(d)* est $\vec{u}\binom{3}{1}$ et un vecteur directeur de *(d')* est $\vec{u}\binom{-4}{-3}$.

$$\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}\,) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\times(-3)+1\times(-4) = -9-4 = -13$$

Donc *(d)* et *(d')* sont sécantes et ont un point d'intersection.
Soit *M(x ;y)* ce point d'intersection. Alors il vérifie les 2 équations en même temps.

$$\begin{cases} x-3y+1=0 \\ -3x+4y+2=0 \end{cases}$$

On le présentera sous la forme

$$\begin{cases} x-3y=-1 \\ -3x+4y=-2 \end{cases}$$

Définition :

Un système de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où *a, b, c, a', b'* et *c'* sont des réels et *(x ; y)* le couple des inconnues.

2. b. 1. Méthode par substitution :

Cette méthode consiste à exprimer une variable en fonction de l'autre dans l'une des deux équations, puis à substituer cette valeur dans la seconde équation : la nouvelle équation obtenue est alors une équation à une inconnue que vous savez résoudre.

On utilisera cette méthode si dans une des équations une des inconnues à un coefficient de 1.

Méthode :

Résoudre le système (S)$\begin{cases} x-3y=-1 \\ -3x+4y=-2 \end{cases}$ par substitution.

Correction :

On remarque que dans la première équation, l'inconnue x à un coefficient de 1, nous allons donc exprimer cette inconnue en fonction de l'autre dans cette équation.

Le système (S) est équivalent à $\begin{cases} x=3y-1 \\ -3x+4y=-2 \end{cases}$

On va remplacer x dans la seconde équation, par sa valeur $3y-1$.

Le système (S) est équivalent à $\begin{cases} x=3y-1 \\ -3(3y-1)+4y=-2 \end{cases}$

On résout la seconde équation où ne figure plus que des y.

$-3(3y-1)+4y=-2 \iff -9y+12+4y=-2 \iff -5y=-2-12 \iff -5y=-14 \iff y=\frac{-14}{-5}=\frac{14}{5}$.

On remplace enfin la valeur de y trouvée dans la première équation :

$x=3y-1=3\times\frac{14}{5}-1=\frac{42}{5}-1=\frac{37}{5}$.

Le système (S) admet pour unique solution le couple $(\frac{37}{5}\,;\,\frac{14}{5})$.

On peut vérifier, en remplaçant x et y par les valeurs trouvées, que les égalités $\frac{37}{5}-3\times\frac{14}{5}=-1$ *et* $-3\times\frac{37}{5}+4\times\frac{14}{5}=-2$.

Le point d'intersection des deux droites est donc le point de coordonnées $(\frac{37}{5}\,;\,\frac{14}{5})$.

2. b. 1. Méthode par combinaison :

Cette méthode consiste à multiplier chaque équation par des coefficients bien choisis afin qu'une addition ou une soustraction des deux équations membre à membre permette l'élimination d'une inconnue.

Méthode :

Résoudre le système (S)$\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$ par combinaison.

Correction :

On multiplie la première équation par 2 et la seconde par 5.

Le système (S) équivaut à $\begin{cases} 4x-10y=2 \\ 15x+10y=55 \end{cases}$.

Si on additionne désormais la première équation et la seconde équation, les y disparaitront.

$\begin{cases} 4x-10y=2 \\ 15x+10y=55 \end{cases}$

$19x+\ \ 0y=57$

On en déduit : $x=\frac{57}{19}=3$.

On remplace x par sa valeur dans la première équation :

$2\times 3-5y=1$, *soit* $6-5y=1$ *soit,* $-5y=1-6$ *soit* $-5y=-5$ *et donc y=1.*

Le système (S) admet donc pour unique solution le couple (3 ;1).