Chapitre III
Notion de fonction
Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions

Table des matières

I. Vocabulaire et notations

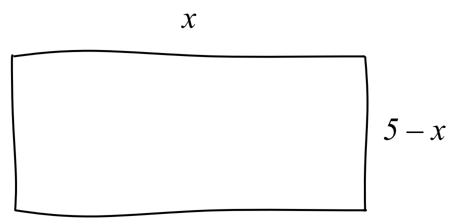
1. Exemple d'introduction :

Avec une ficelle de longueur 10 cm, on fabrique un rectangle.
On désigne par x la longueur d'un côté de ce rectangle.

a) Calculer l'aire du rectangle lorsque $x = 3$ cm.

Si la longueur est égale à 3 cm alors la largeur est égale à 2 cm.
Donc $A = 3 \times 2 =$ cm².

b) Exprimer en fonction de x l'aire du rectangle.



Les dimensions du rectangle sont donc : x et $5 - x$.
En effet : $P = 2x + 2(5 - x) = 10$ cm.
Ainsi l'aire du rectangle s'exprime par la formule $A = x(5 - x)$

c) Développer A.

$A = x(5 - x) = 5x - x^2$

d) On peut calculer l'aire du rectangle pour différentes valeurs de x :

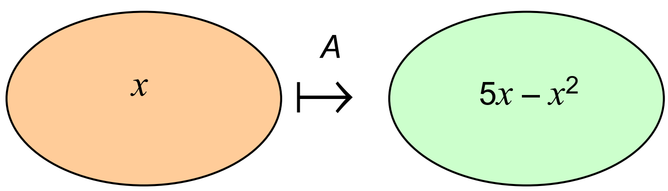
x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Aire	**4**	**5,25**	**6**	**6,25**	**6**	**5,25**	**4**	**2,25**

Ce tableau est appelé un tableau de valeurs.
Pour chaque nombre x, on a fait correspondre un nombre égal à l'aire du rectangle.
Par exemple : $1 \mapsto 4$
$2 \mapsto 6$

De façon générale, on note : $A : x \mapsto 5x - x^2$

$x \mapsto 5x - x^2$ se lit « à x, on associe $5x - x^2$ »

A est appelée une fonction. C'est une « machine » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.



nombre de départ — nombre correspondant

L'expression A dépend de la valeur de x et varie en fonction de x.
x est appelée la variable.
On note ainsi : $A(x) = 5x - x^2$
$A(x)$ se lit « A de x ».
Dans toute la suite, la fonction A sera notée f.
On aura ainsi : $f(x) = 5x - x^2$

2. Définition

Définition :
Soit D une partie de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
Une fonction f définie sur D associe à tout nombre réel x de D un unique nombre réel, noté *f(x)*.
D est appelé l'ensemble de définition de la fonction f.

On note :

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Et on lit :
« La fonction f, définie pour x appartenant à D, qui à un nombre x associe le nombre $f(x)$. »

Pour les ensembles de définition, pour les fonctions polynômes (fonction sans racine carrée ni x au dénominateur de fractions : de la forme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$) l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
Il faudra être vigilant pour les fonctions quotient avec des x au dénominateur, car le dénominateur ne peut être nul et les fonctions avec des racines carrés, car le nombre sous la racine carré ne peut pas être négatif (voir méthode)

Méthode : Trouver l'ensemble de définition d'une fonction
Soient les fonctions f, g et h définies par $f(x) = 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x + 7$, $g(x) = \frac{3x^2-5x}{(x+1)(3x-2)}$ et $h(x) = \sqrt{2x-3}$.
Donnez leur ensemble de définition.
Correction :

- *f est une fonction polynôme, on peut calculer une image pour n'importe quelles valeurs de x, son ensemble de définition est $\mathbb{R}$: $D_f = \mathbb{R}$.*
- *h est une fonction quotient, son dénominateur ne peut pas être nul. Nous allons chercher les x qui annule son dénominateur puis les retirer de l'ensemble de définition :*
$$(x+1)(3x-2) = 0$$
On reconnait une équation produit. Elle est équivalente à : $x + 1 = 0$ ou $3x - 2 = 0$.
Ce qui donne : $x = -1$ ou $3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. On doit donc retirer -1 et $\frac{2}{3}$ de $\mathbb{R}$: $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1; \frac{2}{3}\}$(qui signifie $\mathbb{R}$ privé de -1 et $\frac{2}{3}$).
- *h est une fonction racine carré. Ce qu'il y a sous la racine doit être positif ou nul. Nous allons résoudre :*
$$2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$
L'ensemble de définition est donc les x supérieurs ou égal à $\frac{2}{3}$: $D_h = [\frac{3}{2}; +\infty[$.

3. Image, antécédent

Exemples :

Pour la fonction f définie plus haut, on avait :
$f(2{,}5) = 6{,}25$ $\quad f(1) = 4$

On dit que :
- l'image de 2,5 par la fonction f est 6,25.
- un antécédent de 6,25 par f est 2,5.

$2{,}5 \mapsto 6{,}25$

Antécédent de 6,25 | Image de 2,5

Remarques :
- Un nombre possède une unique image.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents ou aucun.

Par exemple : les antécédents de 5,25 sont 1,5 et 3,5 (voir tableau de valeurs).
Définition :

Pour un nombre a de l'ensemble de définition d'une fonction f, si $f(a)=b$, on dit que :

- b est l'image de a par la fonction f $(b=f(a))$.
- a est un antécédent de b par la fonction f.

Méthode : Calculer une image ou un antécédent algébriquement et graphiquement

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

a. Calculer l'image de 1.

b. Calculer le(s) antécédent(s) de 5.

c. Retrouver ces résultats graphiquement.

Correction :

a. Pour calculer l'image de 1, on calcule f(1) : $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

L'image de 1 par la fonction f est 2 (f(1)=2).

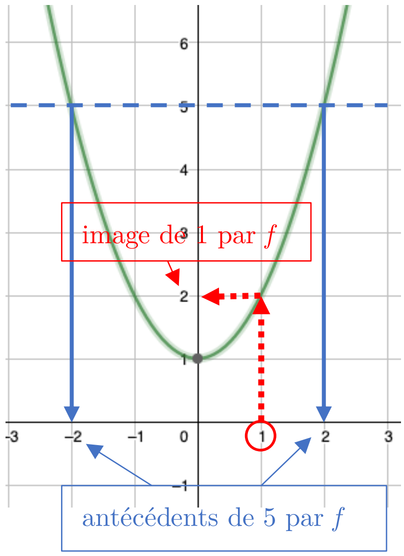
b. Pour calculer les antécédents de 5 par la fonction f, nous devons trouver les x tels que : $f(x) = 5$.

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow (\textit{est équivalent à})\ x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 5 - 1 \Leftrightarrow x^2 = 4.$$

Il y a deux solutions possible : 2 et -2.

Les antécédents de 5 par f sont donc -2 et 2.

c. Nous allons tracer une représentation graphique de la fonction f :



Pour l'image de 1, nous nous plaçons à l'abscisse 1 sur l'axe des abscisses et nous rejoignons la courbe verticalement. Ensuite, nous lisons l'image de 1 sur l'axe des ordonnées. Nous retrouvons bien 2. (voir ligne rouge sur le graphique).

Pour les antécédents de 5, nous traçons une droite horizontale d'ordonnées 5, et nous lisons toutes les abscisses des points d'intersection de cette droite avec la courbe. Nous retrouvons bien -2 et 2. (voir ligne bleue sur le graphique).

Méthode : Calculer une image ou un antécédent avec un tableau de valeurs

Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x} + 1$

1) Compléter le tableau de valeurs :

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$				

2) Compléter alors :

a) L'image de 4 par g est …

b) Un antécédent de 5 par g est …

c) g : … $\mapsto$ 4,2

d) $g(20{,}25) =$ …

3) Calculer $g(4{,}41)$ et $g(1310{,}44)$

Correction :

1)

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$	**3**	**4,2**	**5**	**5,5**

2) a) L'image de 4 par g est ***g(4)=3****.*

b) Un antécédent de 5 par g est ***16****.*

c) g : ***10,24*** $\mapsto$ *4,2*

d) g(20,25) = ***5,5***

3) $g(4{,}41) = \sqrt{4{,}41} + 1 =$ ***3,1***

$g(1310{,}44) = \sqrt{1310{,}44} + 1 =$ ***37,2***

Méthode : Trouver graphiquement image ou antécédent

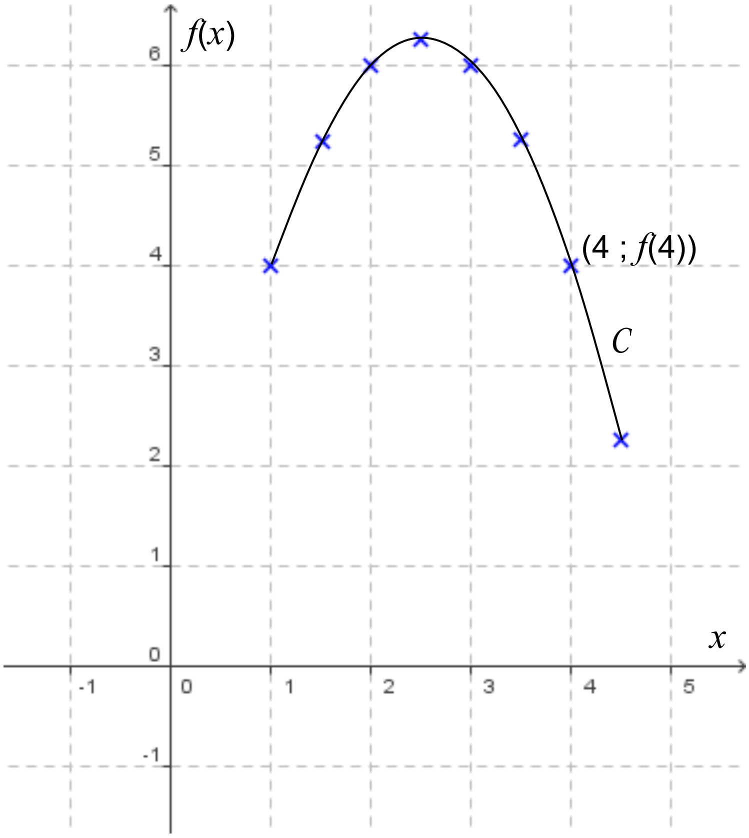
II. Représentation graphique

1. Courbe représentative

<u>Exemple :</u>
Représenter les données du tableau de valeurs du paragraphe **I.** dans un repère tel qu'on trouve en abscisse la longueur du côté du rectangle et en ordonnée son aire correspondante.

En reliant les points, on obtient une courbe *C*.

Tout point de la courbe *C* possède donc des coordonnées de la forme $(x\ ;\ f(x))$.

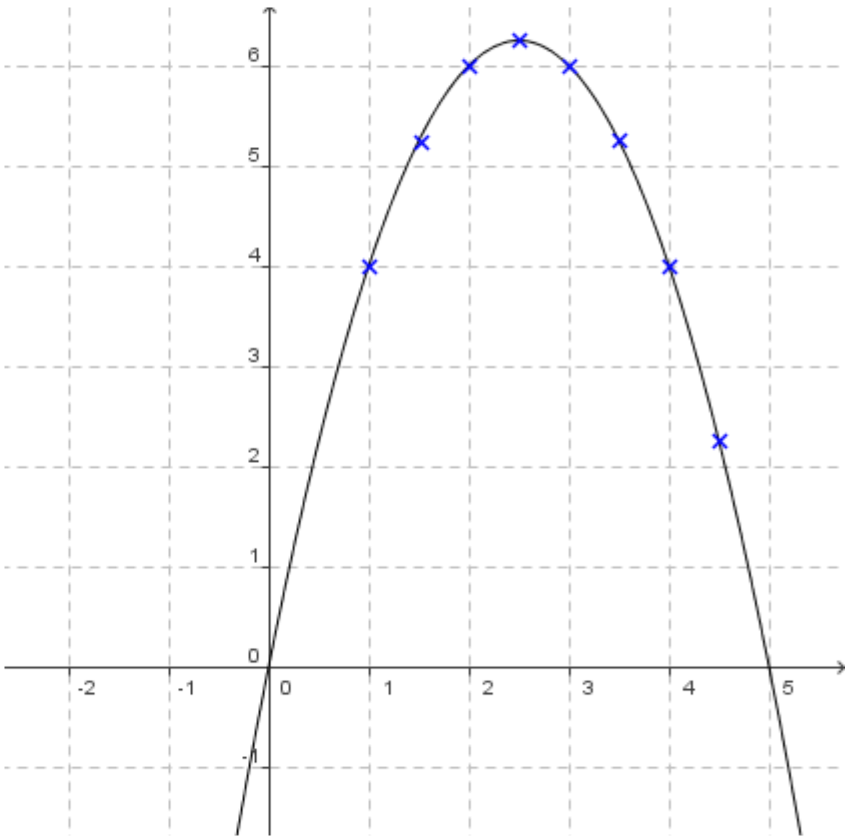


On peut ainsi affirmer que l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ avec $y=f(x)$ définissent la courbe représentative de la fonction *f*.
On dira que $y=f(x)$ est l'équation de la courbe.

Définition : La courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $y = f(x)$.

2. Courbe représentative à l'aide d'un logiciel

Ouvrir le logiciel [*GeoGebra*]() et saisir directement l'expression de la fonction *f*.
Dans la barre de saisie, on écrira : f(*x*)=5*x*-*x*^2



La courbe représentative de la fonction f dépasse les limites du problème.
En effet, l'expression de la fonction f accepte par exemple des valeurs négatives de x, ce que les données du problème rejettent puisque x représente une longueur !

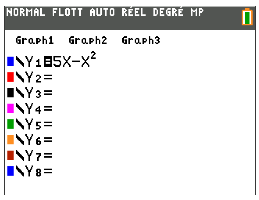
On peut ainsi dresser un tableau de signes de la fonction f sur un intervalle plus grand :

x	-1		0		5		6
$f(x)$		-	0	$+$	0	-	

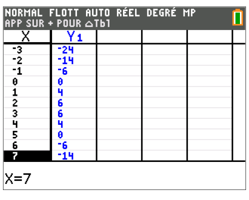
3. Courbe représentative à l'aide de la calculatrice et tableau de valeurs

Texas Instrument :

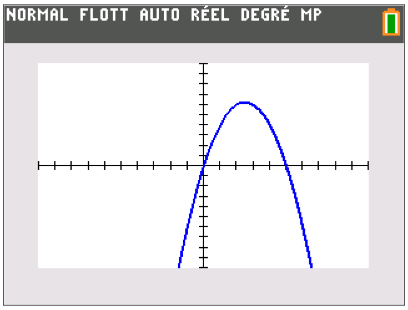
Appuyez sur $\boxed{\text{f(x)}}$ puis rentrez la fonction (pour le x, utilisez la touche $\boxed{\text{X,T,}\theta\text{,n}}$) :



Pour afficher le tableau de valeurs, sélectionnez **table** :



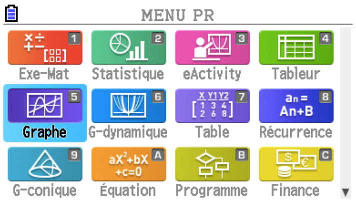
Pour afficher le graphique, sélectionnez graphe :



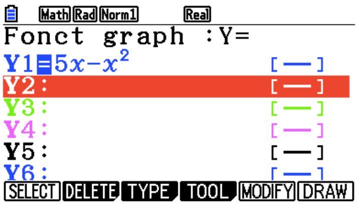
Le tableau et la fenêtre graphique sont paramétrables grâce aux touches **déf table** et fenêtre.
En appuyant sur trace, vous avez les coordonnées d'un point sur la courbe que vous pouvez faire bouger à l'aide des flèches, ou en rentrant une valeur pour le X.

Casio :

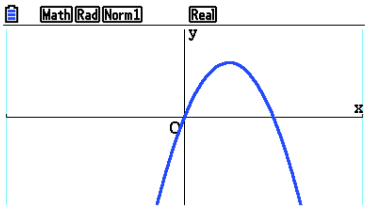
Dans menu, allez dans Graphe :



Rentrez ensuite votre courbe (utilisez la touche X,θ,T pour le x) :

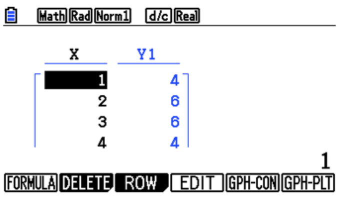


Pour visualisez la courbe, sélectionnez DRAW (F6) :

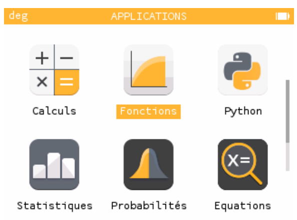


En sélectionnant trace et avec les flèches ou en rentrant une valeur pour X, vous avez des coordonnées de points appartenant à la courbe.
À l'aide Zoom ou V-Window, vous modifiez la fenêtre d'affichage.

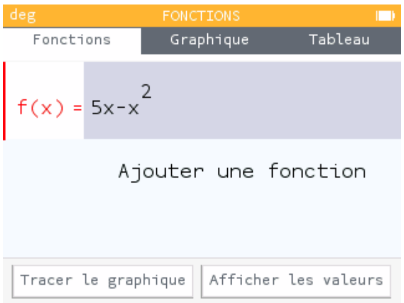
Pour le tableau de valeurs, retourner dans menu, et sélectionnez Table puis de nouveau Table (F6) si votre fonction est déjà rentrée (vous pouvez aussi paramétrer votre tableau à l'aide de SET:



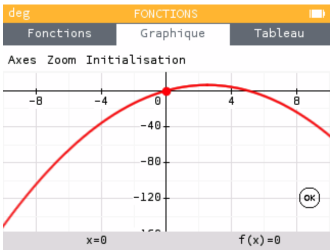
NumWorks :
Allez dans Fonctions :

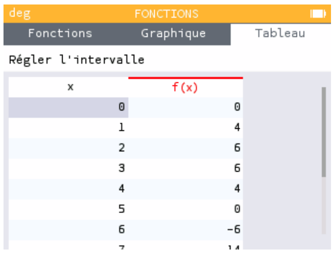


Rentrez votre fonction en sélectionnant *Ajouter une fonction* (pour le x, utilisez : $\boxed{\text{x,n,t}}$) :



Pour le graphique sélectionnez *Tracer le graphique*, pour le tableau de valeurs, sélectionnez *Afficher les valeurs*.





Pour modifier la fenêtre d'affichage de votre graphique vous pouvez aller dans Axes et/ou zoom, pour paramétrer le tableau de valeurs dans régler l'intervalle.

4. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

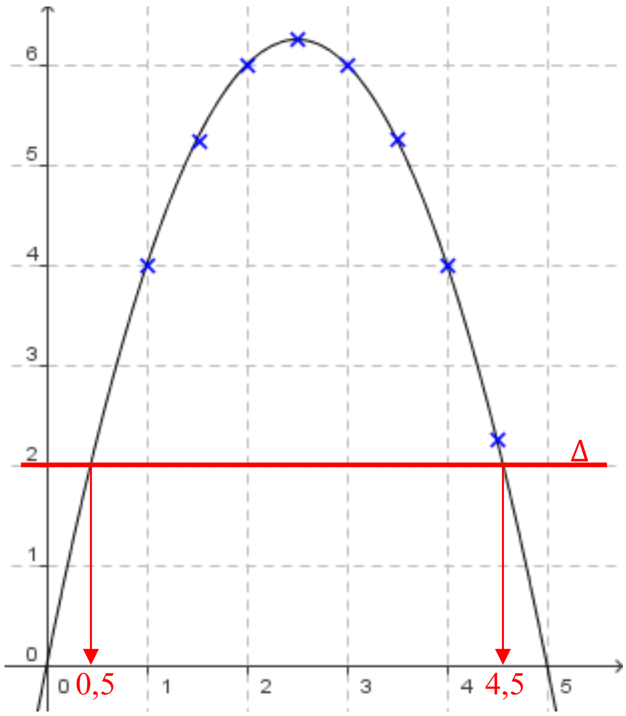
Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation du type *f(x)=k, f(x)<k*

Répondre *graphiquement* aux questions suivantes :

a) Résoudre l'équation $5x - x^2 = 2$.

b) En déduire un ordre de grandeur des dimensions d'un rectangle dont l'aire est égale à 2 cm^2.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 2$. Donner une interprétation du résultat.



a) Il s'agit de trouver les antécédents de 2 par la fonction *f*.
Ce qui revient à résoudre l'équation
$f(x) = 2$.

On détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite Δ parallèle à l'axe des abscisses passant par le point (0 ; 2).
On lit graphiquement que l'équation
$5x - x^2 = 2$ admet pour solutions : les nombres 0,5 et 4,5.

b) Le rectangle de dimensions 0,5 cm sur 4,5 cm possède une aire environ égale à 2 cm^2.

c) Résoudre l'inéquation $5x - x^2 > 2$ revient à déterminer les abscisses des points de C pour lesquels C est strictement au-dessus la droite Δ.
On lit graphiquement que l'inéquation $5x - x^2 > 2$ admet pour solutions tous les nombres de l'intervalle
]0,5 ; 4,5[.

Si une dimension du rectangle est strictement comprise entre 0,5 et 4,5 alors son aire est supérieure à 2.

Remarques :

a) Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.

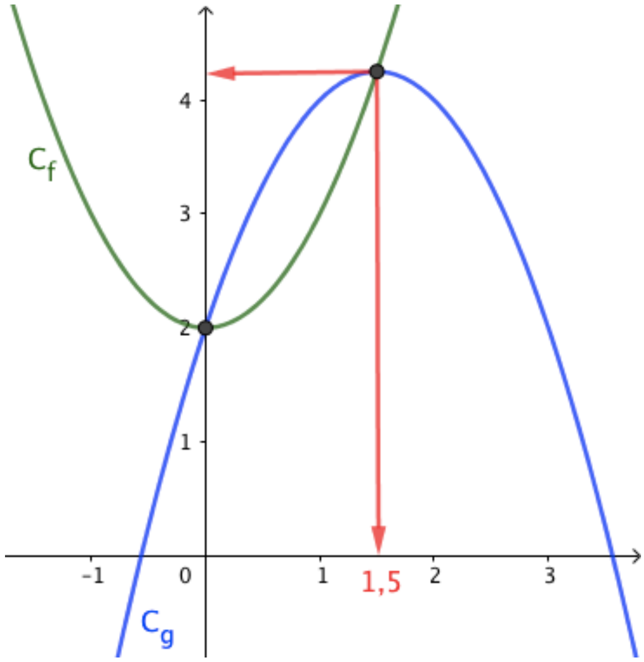
b) L'équation $f(x) = 7$ n'a pas de solution car dans ce cas la droite Δ ne coupe pas la courbe.

c) Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation du type *f(x)=g(x), f(x)<g(x)*

On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+2$ et $g(x) = -x^2 + 3x + 2$.
Répondre graphiquement aux questions suivantes :
a) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
b) Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$.

A l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice graphique, on trace les courbes représentatives des fonctions f et g.

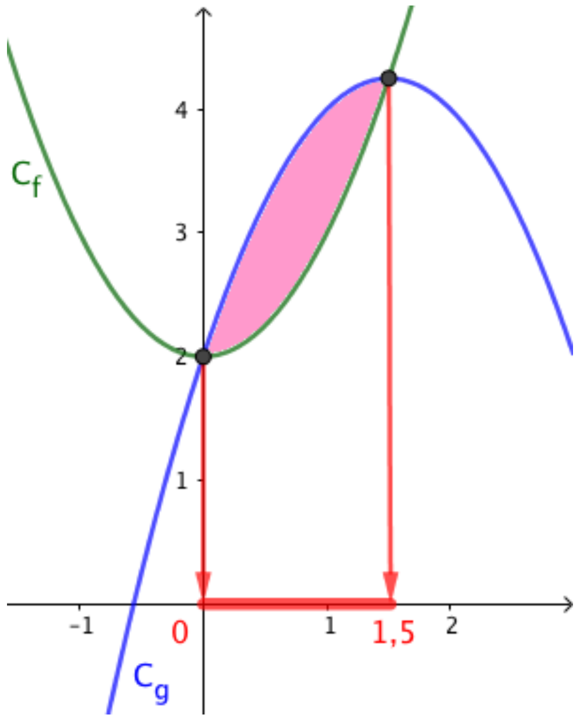


Correction :

a) Aux points où les courbes se croisent, les fonctions renvoient la même image soit $f(x) = g(x)$.

Pour déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, il suffit de lire l'abscisse des points d'intersection des deux courbes.

On lit graphiquement que l'équation
$f(x) = g(x)$ admet pour solutions : les nombres 0 et 1,5.

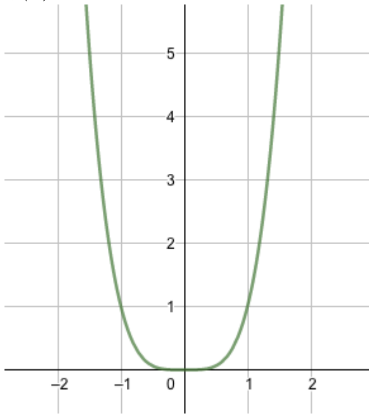
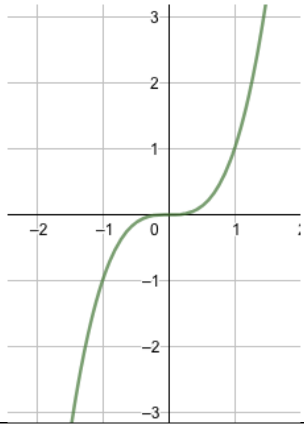


b) Pour déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$, il suffit de lire sur l'axe des abscisses l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la courbe de g se trouve au-dessus de la courbe de f.

On lit graphiquement que l'inéquation
$f(x) < g(x)$ admet pour ensemble solution l'intervalle $]0\,;1{,}5[$.

Les valeurs 0 et 1,5 sont exclues de l'ensemble des solutions car dans l'inéquation $f(x) < g(x)$ l'inégalité est stricte. Les solutions (0 et 1,5) de l'équation $f(x) = g(x)$ ne sont donc pas acceptées.

III. Parité d'une fonction

	Fonction paire	Fonction impaire
Définition	Une fonction f , définie sur un ensemble Df est <u>paire</u> lorsque : $\forall\, x \in Df$, $f(-x)=f(x)$. *Exemple :* *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4$ est paire.* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$ *Ainsi f est paire.*	Une fonction f, définie sur un ensemble Df est *impaire* lorsque : $\forall\, x \in Df$, $f(-x)=-f(x)$. Exemple : Montrer que la fonction définie sur IR par $f(x)=x^3$ est impaire. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(-x)=(-x)^3= (-x)x(-x)x(-x)=-x^3$ $=-f(x)$ Ainsi f est impaire.
Représentation graphique	Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ex. : $f(x)=x^4$ 	Dans un repère quelconque, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère. Ex. : $f(x)=x^3$ 

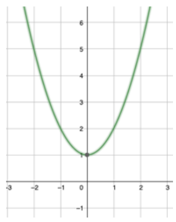
Remarques :

- Étudier la parité d'une fonction revient à déterminer si elle est paire, impaire ou ni paire, ni impaire.
- La fonction nulle est la seule fonction qui soit à la fois paire et impaire.
- si n est paire alors $(-x)^n = x^n$ et si n est impaire alors $(-x)^n = -x^n$

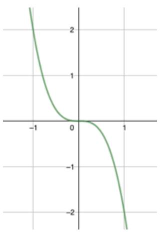
Méthode : Trouver la parité d'une fonction

Étudier la parité des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -2x^3$ et $h(x) = (x-3)^2 + 5$.

Correction :
Pour chacune des fonctions, nous allons calculer $f(-x)$ puis voir si nous retrouvons $f(x)$ (on aura une fonction paire), -$f(x)$ (nous aurons une fonction impaire) ou rien de cela (fonction ni paire ni impaire).



- $f(x) = x^2 + 1$ *donc* $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.
  On a donc $f(-x) = f(x)$. *f est donc paire et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (graphique de droite).*



- $g(x) = -2x^3$ *donc* $g(-x) = -2(-x)^3 = -2 \times (-x^3) = 2x^3 = -g(x)$.
  On a donc $g(-x) = -g(x)$. *g est donc impaire et symétrique par rapport à O (graphique de gauche).*

- $h(x) = (x-3)^2 + 5$ *donc* $h(-x) = (-x-3)^2 + 5$. *Nous ne retrouvons ni $h(x)$ ni -$h(x)$. h est donc ni paire ni impaire.*

IV. Signe d'une fonction

1. Définition :

On dit qu'une fonction f est **positive** sur un ensemble D si, pour toute valeur $x \in D$, on a $f(x) \geq 0$.
De même, on dit que f est **négative** sur un ensemble D si, pour toute valeur $x \in D$, on a $f(x) \leq 0$.

Graphiquement, une fonction est positive si sa courbe représentative se situe au-dessus de l'axe des abscisses, et elle est négative si sa courbe représentative se situe sous l'axe des abscisses.

Remarque :
Généralement on consignera les informations concernant le signe d'une fonction dans un tableau de signes.

2. Signe d'une expression affine $ax + b$ $(a \neq 0)$

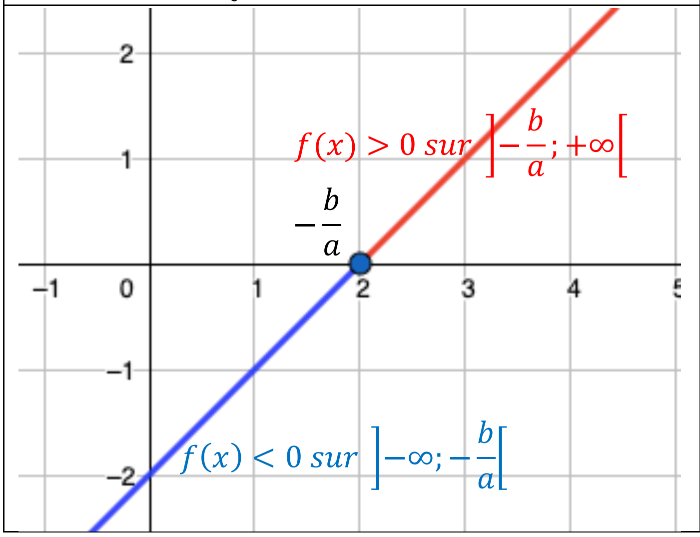
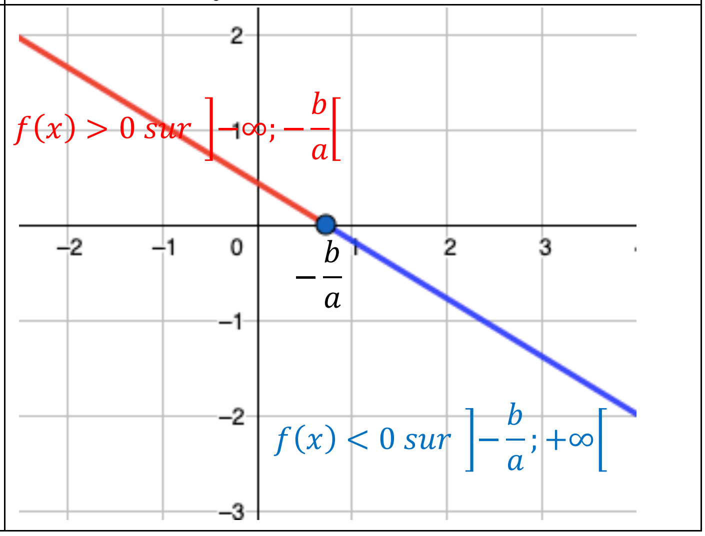
On considère la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \mapsto ax + b$, avec $a \neq 0$.

Propriété :
Le signe de $f(x) = ax + b$ dépend de a et change en $-\frac{b}{a}$, unique solution de l'équation $ax + b = 0$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f(x) = ax + b$		Signe inverse de a	0	Signe de a	

Illustration graphique :

<table>
<tr><th>Cas où $\boldsymbol{a} > 0$
$\boldsymbol{f}$ est croissante</th><th>Cas où $\boldsymbol{a} < 0$
$\boldsymbol{f}$ est décroissante</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

3. Méthode : Étudier le signe d'une fonction de type $ax + b$

Dresser le tableau de signes de la fonction suivante : $f(x) = -5x + 7$.

Correction :
On a ici, a=-5 et b=7.
On sait que la fonction change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{7}{-5} = \frac{7}{5}$.
À droite de $\frac{7}{5}$, *elle sera du signe de a c'est-à-dire négative (-).*
Remarque :
Attention à ne pas oublier le signe des coefficients a et b dans la formule !

x	$-\infty$		$\frac{7}{5}$		$+\infty$
Signe de $f(x) = -5x + 7$		$+$	0	-	

4. Méthode : Étudier le signe d'une fonction de type $(ax + b)(cx + d)$

Dresser le tableau de signes de la fonction suivante : $f(x) = (3x + 2)(2x - 6)$.

Correction :

Nous allons procéder comme pour la méthode avec ax+b, mais nous ferons une ligne pour $3x + 2$, *une pour* $2x - 6$ *et enfin une dernière pour* $(3x + 2)(2x - 6)$ *en utilisant la règle des signes avec les 2 lignes du dessus…*

$3x + 2$ *change de signe en* $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$. *Elle est du signe de a (3 donc positive) à gauche de* $-\frac{2}{3}$.

$2x - 6$ *change de signe en* $-\frac{b}{a} = -\frac{-6}{2} = \frac{6}{2} = 3$. *Elle est du signe de a (2 donc positive) à gauche de* $-\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
Signe de $3x + 2$		-	0	+		+	
Signe de $2x - 6$		-		-	0	+	
Signe de $(3x + 2)(2x - 6)$..		+	0	-	0	+	

Annexe :

Exemple d'introduction : (feuille élève)

Avec une ficelle de longueur 10 cm, on fabrique un rectangle.
On désigne par x la longueur d'un côté de ce rectangle.

a) Calculer l'aire du rectangle lorsque $x = 3$ cm.

b) Faire un schéma puis exprimer en fonction de x l'aire du rectangle.

c) Développer A si ce n'était pas fait.

d) On peut calculer l'aire du rectangle pour différentes valeurs de x : Remplir le tableau.

x	*1*	*1,5*	*2*	*2,5*	*3*	*3,5*	*4*	*4,5*
Aire	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

Ce tableau est appelé un tableau de valeurs.

Méthode : Calculer une image ou un antécédent avec un tableau de valeurs

Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x} + 1$
1) Compléter le tableau de valeurs :

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$				

2) Compléter alors :
   a) L'image de 4 par g est …
   b) Un antécédent de 5 par g est …
   c) g : … $\mapsto$ 4,2
   d) $g(20,25) =$ …

3) Calculer $g(4,41)$ et $g(1310,44)$