Chapitre IV

Calcul littéral

Utiliser le calcul littéral (sauf racines carrées) (1s)

Table des matières

I. Calcul avec des fractions (Rappels)

Propriétés :
Pour tous réels a, b, c et d avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $a \times d = b \times c$.
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.
- $\frac{b \times c}{b \times d} = \frac{c}{d}$.
- $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$.

Pour tous réels a, b et c, avec $d \neq 0$:
$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Ex. :
$$x + \frac{3}{x} = \frac{x}{1} + \frac{3}{x} = \frac{x \times x}{1 \times x} + \frac{3}{x} = \frac{x^2 + 3}{x}$$

Pour tous réels a, b, c et d avec b, c et d non nuls :
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse).

Ex. :
$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

II. Calcul avec des carrés

1. Rappels :

Pour tous nombres réels k, a, b, c et d :

- $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$.
- $(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$.

2. Identités remarquables

Propriétés :
Pour tous réels a et b :

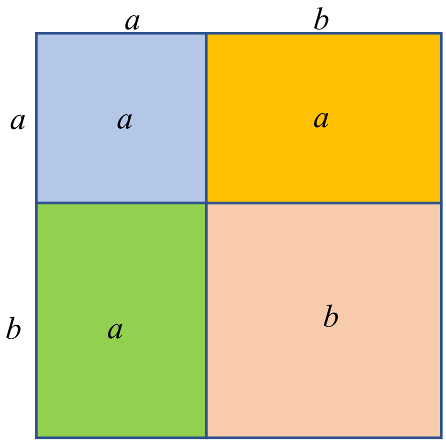
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Démonstration :
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2ab + b^2$ *car* $a \times b = b \times a$.
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \times a - a \times b - b \times a + b \times b = a^2 - 2ab + b^2$ *car* $a \times b = b \times a$.
$(a + b)(a - b) = a \times a - a \times b + b \times a - b \times b = a^2 - b^2$

Exercice :

Développer :
$(a + b + c)^2$ et $(a + b)^3$

Voici une illustration géométrique de la 1ère formule :
L'aire du grand carré de $a+b$ de côté est égale à la somme des 2 carrés de côtés respectifs a et b, et des 2 rectangles de largeur et longueur a et b.



III. Calcul avec des puissances

Définitions :

- Si a est un réel et n un nombre entier naturel non nul, alors le nombre a^n est défini par le produit $\underbrace{a \times a \times \ldots . \times a}_{n\ termes}$.
- Si a est un réel non nul et n un entier relatifs, alors $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Exemple :

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Propriétés :

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$
$$(a^n)^p = a^{n \times p}$$
$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad (a \neq 0)$$
$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$$

Exemples :

$5^6 \times 5^{-4} = 5^{6+(-4)} = 5^2 = 25$

$\frac{3^{15}}{3^{11}} = 3^{15-11} = 3^4 = 81$

$2^4 \times 5^4 = (2 \times 5)^4 = 10^4$

Exercices Puissances :

Exercice 1:

Mettre les expressions suivantes sous la forme a^n :

$A = 3^{12} \times 3^7$;

$B = 4^2 \times 4^5 \times 4^3$;

$C = (5^3)^5$;

$D = (9^3)^7$

$E = \frac{7^7}{7^2}$;

$F = \frac{2^5}{2^{12}}$;

$G = 2^3 \times 5^3$;

$H = 7^{12} \times 2^{12}$.

Exercice 2:

Mettre les expressions suivantes sous la forme a^n :

$I = 4^2 \times 4^5 \times (4^3)^2$;

$J = (7^2)^3 \times (7^4)^5$;

$K = (5^2)^4 \times 5$;

$L = \frac{3^4}{3^7}$;

$M = (2^3)^4$;

$N = \frac{(2^5)^5}{(2^4)^6}$;

$O = 2^5 \times 3^5 \times 7^5$.