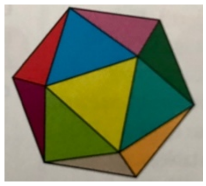
Chapitre V

Probabilité (1,5s)

Table des matières

Activité d'introduction



Un dé possède 20 faces de couleurs différentes, numérotées de 1 à 6, tel qu'il y ait 5 faces n°1, 5 faces n°2, 4 faces n°3, 3 faces n°4, 2 faces n°5 et 1 face n°6.
On lance le dé, supposé équilibré, et on note le numéro de la face sur laquelle il se stabilise.

A. Distribution de probabilité

1. Préciser l'ensemble : Ω *(*Ω se lit « oméga ») des issues (résultats) possibles de cette expérience aléatoire.
2. Remplir le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité						

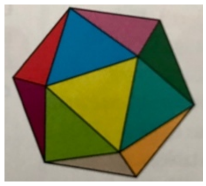
Ces issues sont-elles équiprobables ?

B. Notation ensembliste et probabilité d'un évènement

On considère les évènements suivants :
A : « Un numéro pair sort » ; B : « Un numéro strictement supérieur à 3 sort » et C : « Le 6 sort ».

1. Écrire l'ensemble des issues qui réalisent l'évènement A (Vous les écrirez entre accolades).
Cette écriture est appelée <u>écriture ensembliste</u> de A.
2. Donner les écritures ensemblistes des évènements B et C.
3. Calculer les probabilités des évènements A, B et C.

Activité d'introduction



Un dé possède 20 faces de couleurs différentes, numérotées de 1 à 6, tel qu'il y ait 5 faces n°1, 5 faces n°2, 4 faces n°3, 3 faces n°4, 2 faces n°5 et 1 face n°6.
On lance le dé, supposé équilibré, et on note le numéro de la face sur laquelle il se stabilise.

A. Distribution de probabilité

1. Préciser l'ensemble : Ω *(*Ω se lit « oméga ») des issues (résultats) possibles de cette expérience aléatoire.
2. Remplir le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité						

Ces issues sont-elles équiprobables ?

B. Notation ensembliste et probabilité d'un évènement

On considère les évènements suivants :
A : « Un numéro pair sort » ; B : « Un numéro strictement supérieur à 3 sort » et C : « Le 6 sort ».

1. Écrire l'ensemble des issues qui réalisent l'évènement A (Vous les écrirez entre accolades).
Cette écriture est appelée <u>écriture ensembliste</u> de A.
2. Donner les écritures ensemblistes des évènements B et C.
3. Calculer les probabilités des évènements A, B et C.

I. Expérience aléatoire

1. Exemples :

On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.

Définitions :
Une expérience (lancé un dé par exemple) est aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats ou issues (1 ou 3 par exemple) et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.

L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle l'univers et se note, pour un lancer de dé cubique :
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. (Ω se lit « oméga »)

2. Réalisons une expérience aléatoire :

A l'aide du langage Python, simulons des lancers de dé. Tout d'abord 100 lancers puis 5000 lancers.
Vous pouvez télécharger le logiciel Thonny que nous utilisons au lycée afin de refaire ces simulations.

```
from random import *

effectifs=[0,0,0,0,0,0]
for n in range(100):
    dice=randint(1,6)
    effectifs[dice-1]+=1
print(effectifs)
```

Pour 10 lancers :

Faces	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Total*
Effectifs	…	…	…	…	…	…	100

Pour 5000 lancers :

```
from random import *

effectifs=[0,0,0,0,0,0]
for n in range(5000):
    dice=randint(1,6)
    effectifs[dice-1]+=1

print(effectifs)
```

Faces	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Total*
Effectifs	…	…	…	…	…	…	5000
Fréquences	……..%	……..%	………%	……….%	………%	……..%	100

Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres.
Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, … ou un 6.
En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente.

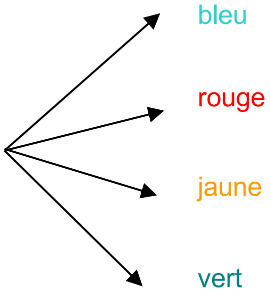
La suite de la leçon nous expliquera comment calculer les fréquences théoriques d'une expérience aléatoire.

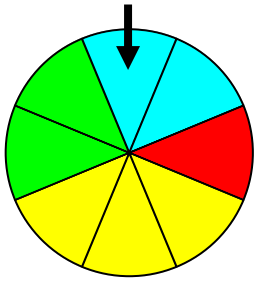
II. Probabilité d'un évènement

1. Arbre des possibles

Exemple :

Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre issues sont possibles. On le schématise sur l'arbre des possibles :





Définition :

L'arbre des possibles permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire.

2. Probabilité

Définition :

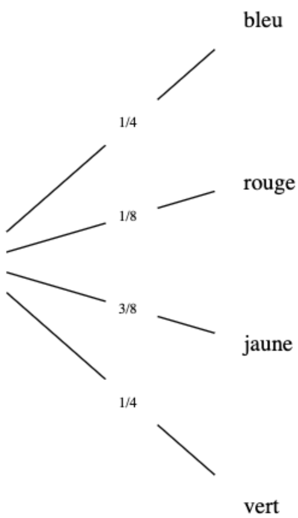
Les fréquences obtenues d'un événement E se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expérience augmente (Loi des grands nombres). Cette valeur s'appelle la probabilité de l'événement E.

Exemple :

2 secteurs sur 8 sont de couleur bleue. Lors d'une expérience aléatoire, il y a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur bleue.

On dit que la probabilité d'obtenir un secteur bleu est égale à $\frac{2}{8}$, soit $\frac{1}{4}$.

On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.

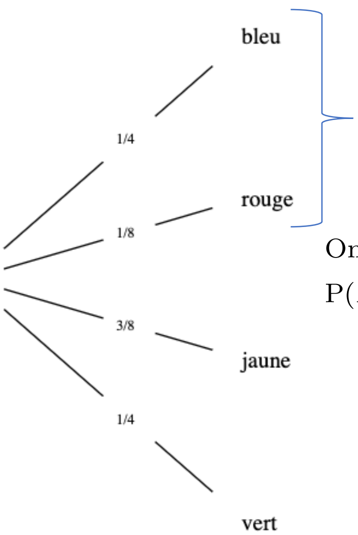


3. Évènement

Exemple :

Soit l'évènement E « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ».

On pourrait se demander qu'elle est la probabilité que cet évènement se réalise ?



E se réalise : $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

On dit que la probabilité que l'évènement E se réalise est égale à $\frac{3}{8}$ et on note : $\mathrm{P}(E) = \frac{3}{8}$.

Définitions :
Un évènement est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
Les événements élémentaires sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

Dans l'exemple, « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge » est un évènement.
« La roue s'arrête sur un secteur bleu » est un évènement élémentaire.

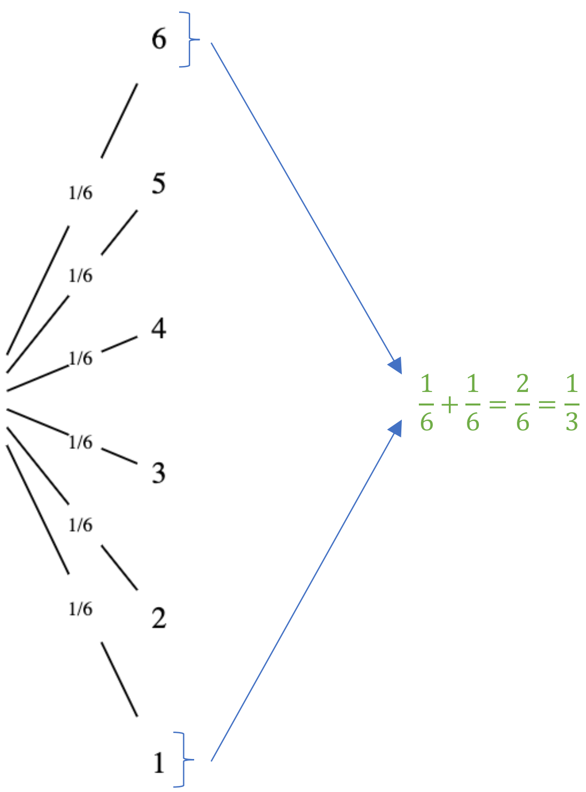
Méthode : Dénombrer pour calculer une probabilité

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
Soit E l'évènement : « On tire un as ».
Quelle est la probabilité que l'évènement E se réalise ?

Correction :
Il a 32 issues possibles car il existe 32 façons différentes de tirer une carte.
L'événement E possède 4 issues possibles : As de cœur, as de carreau, as de trèfle et as de pique.
La probabilité que l'événement E se réalise est donc égale à : $P(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Méthode : Calculer une probabilité en utilisant un arbre des possibles
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
Soit E l'évènement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».
Quelle est la probabilité que l'évènement E se réalise ?

Correction :
On construit l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire :
Chaque issue à la même probabilité : il y a une chance sur six de sortir un 1, un 2, … ou un 6.
On dit qu'il y a équiprobabilité.



Ainsi $P(E) = \frac{1}{3}$

La probabilité que l'évènement E se réalise est de $\frac{1}{3}$.

Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un 1 ou un 6 en lançant un dé.

Propriétés :

- La probabilité P(E) d'un événement E est telle : $0 \leq P(E) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Définition :

L'ensemble des probabilités de ces événements élémentaires constitue ce qu'on appelle la loi de probabilité.

4. Évènement contraire

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

Soit E l'évènement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».

Alors l'évènement contraire de E est : « La face du dessus est un 2, un 3, un 4 ou un 5 ». Cet évènement est noté $\bar{E}$.

Propriété :

La probabilité de l'événement contraire d'un événement E est : $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

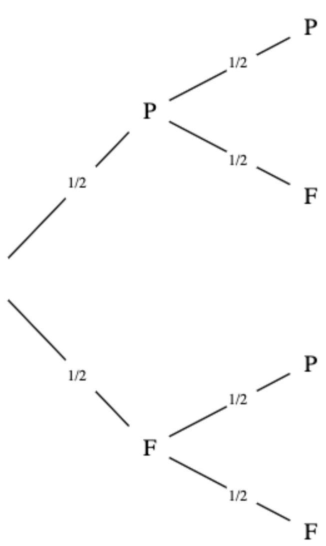
5. Exemple d'une expérience aléatoire à deux épreuves

<u>Méthode :</u> Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves.

Soit E l'évènement : « On obtient au moins une fois la face PILE. »

Calculer P(E).



(P ; P) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (probabilité d'obtenir deux piles)

(P ; F) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (probabilité d'obtenir pile puis face)

(F ; P) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (probabilité d'obtenir face puis pile)

Sur un même chemin, on multiplie les probabilités.

$$P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

La probabilité que l'évènement E se réalise est de $\frac{3}{4}$.

Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois la PILE lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

III. Réunion et intersection de deux événements

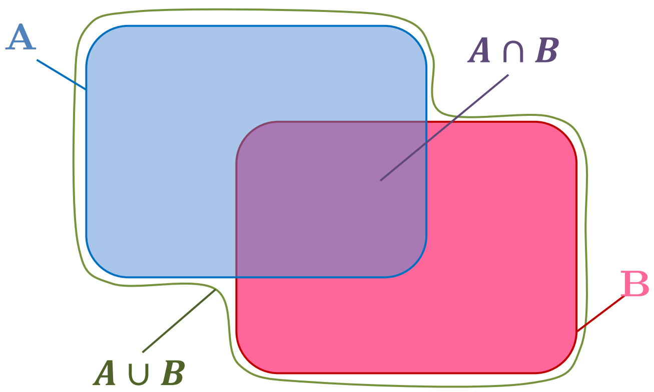
1. Définitions

Exemple :
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants :
A : « On tire un valet »
B : « On tire un cœur ou un carreau »

L'intersection des évènements A et B est l'évènement :
« On tire le valet de cœur ou le valet de carreau ». On note cet évènement A ∩ B et on lit « A inter B »

La réunion des évènements A et B est l'évènement :
« On tire le valet de piques, le valet de trèfle, un cœur ou un carreau ». On note cet évènement $A \cup B$ et on lit « A union B »

Définitions :
L'événement "A et B", noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont <u>simultanément</u> réalisés.
L'événement "A ou B", noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'<u>au moins </u>l'un des deux événements est réalisé.



2. Probabilité d'une réunion

Théorème :
Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

<u>Méthode :</u> Calcul de probabilité en utilisant la formule de probabilité d'une réunion
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
On considère les événements suivants :
A : « On obtient un nombre impair »
B : « On obtient un multiple de 3 »
Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

Correction :
$P(A) = \frac{1}{2}$ *et* $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$A \cap B$ *est l'événement élémentaire : « On obtient un 3 », donc :* $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

L'événement $A \cup B$ a donc pour probabilité :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

3. Événements incompatibles

Définition :
On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
Propriété :
Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Exemple :
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants :
A : « On tire un valet »
B : « On tire un roi »
Les deux évènements A et B sont incompatibles, en effet $A \cap B = \emptyset$.
On en déduit que la probabilité de l'évènement « Tirer un valet ou un roi » est égale à :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

Calculer une probabilité à l'aide d'un tableau :

Dans une classe de 35 élèves, 16 élèves pratiquent l'anglais, 11 pratiquent l'espagnol et 4 élèves pratiquent les 2.
Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard dans la classe ne pratique ni l'anglais ni l'espagnol.

Correction :
Nous allons faire un tableau, afin de synthétiser toutes les données de l'énoncé.
Nous placerons dans les bonnes cases les données et vous pourront finir de remplir le tableau simplement.
J'ai numéroté l'ordre dans lequel faire les opérations.

	Pratiquent l'anglais	Ne pratiquent pas l'anglais	Total
Pratiquent l'espagnol	4	(3) 11-4=7	11
Ne pratiquent pas l'espagnol	(1) 16-4=12	(4) 19-7=12	(5) 12+12=24 *On peut aussi vérifier le calcul sur la colonne : 11+24=35.*
Total	16	(2) 35-16=19	35

On a ici l'ensemble des élèves faisant de l'anglais (soit uniquement de l'anglais soit avec de l'espagnol)

On a ici l'ensemble des élèves faisant de l'espagnol mais pas d'anglais

Il y a donc 12 élèves sur les 35 élèves au total qui ne pratiquent ni l'anglais, ni l'espagnol.
La probabilité d choisir au hasard un élève qui ne fait ni anglais ni espagnol est de $\frac{12}{35} \approx 0{,}34$ soit environ 34%.

IV. TP MONTY HALL

Let's make a deal
The Monty Hall Problem

Congratulations!!!You're on a TV show and you have mastered all the questions! You now stand in front of three doors. Behind one of them is an expensive sports car; behind the other two there's a goat.
You are asked to pick a door, and will win whatever is behind it (of course, your goal is to win the sports car). But the door you picked is not opened. The host (who knows the location of the sports car) opens one of the otherdoors instead and shows a goat.

He then asks you if you would like to switch your selection to the other unopened door, or stay with your original choice.

The question is: Should you stick with your original choice or switch? Does it make any difference?

1. What do you think about this problem? Are your chances better if you switch, or does it not matter whether you switch or not? Try to explain your answer below.

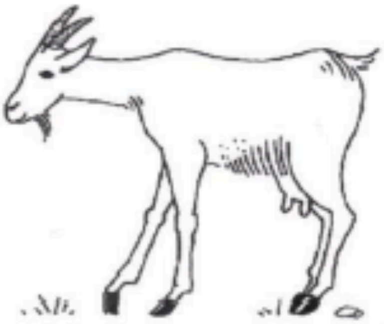
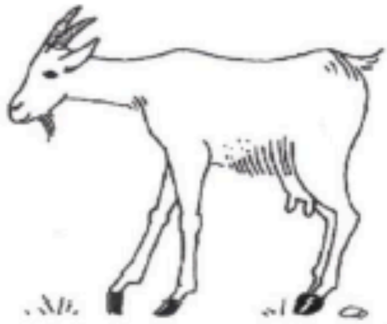
2. You're going to try both strategies. Play the Monty Hall Game and record your results in the table below (if you don't switch doors, fill in the first line; and if you switch, fill in the second line).

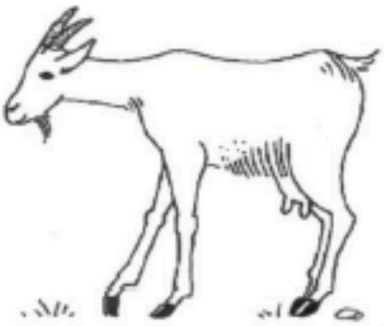
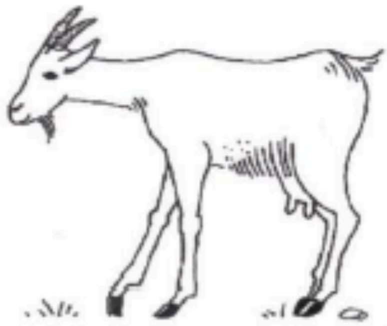
Strategy	Wins	Losses	Total
Don't switch doors			
Switch doors			

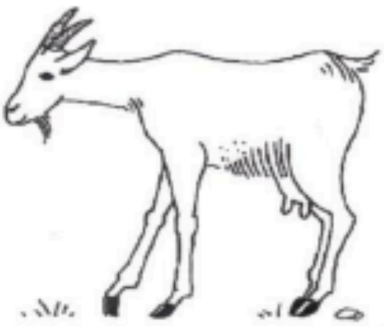
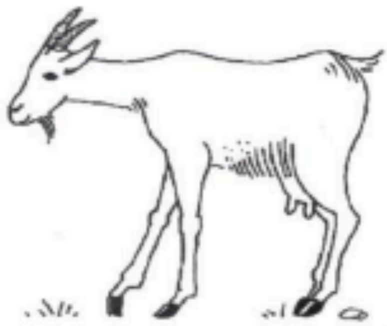
3. Now, go and write your results on the computer.

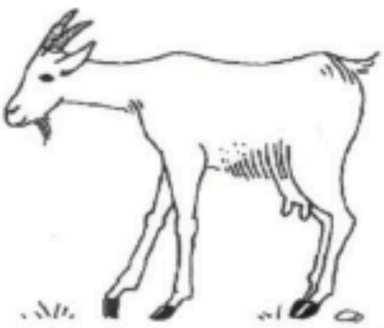
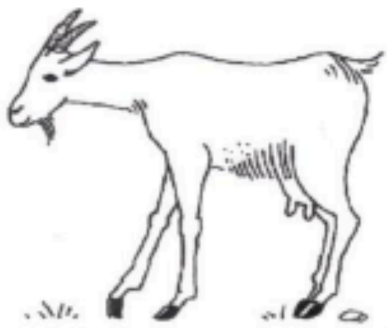
4. Now, fill in the chart below in percentages (white columns for your own results and grey columns for the class')

Strategy	Wins		Losses	
Don't switch doors				
Switch door				


Code Python pour simulation Monty Hall :

```
def garderporte(s):
    from random import randint
    t=0
    g=0
    p=0
    while (t<s):
        pos_voiture = randint(1,3)
        choix = randint(1,3)
        t=t+1
        if pos_voiture==choix:
            g+=1
        else:
            p+=1
    print("sur les ",t,"parties, vous en avez gagné",g," et perdu",p,"fois")

def changerporte(s):
    from random import choice
    t=0
    g=0
    p=0
    while (t<s):
        liste=[1, 2, 3]
        pos_voiture = choice(liste)
        choix = choice(liste)
        if choix==pos_voiture:
            liste.remove(choix)
        else:
            liste.remove(choix)
            liste.remove(pos_voiture)
        porteouv=choice(liste)
        liste.append(pos_voiture)
        liste.remove(porteouv)
        choixfinal=liste[0]
        t=t+1
        if pos_voiture==choixfinal:
            g=g+1
        else:
            p=p+1
    print("sur les ",t,"parties, vous en avez gagné",g," et perdu",p,"fois")
```