Chapitre VIII

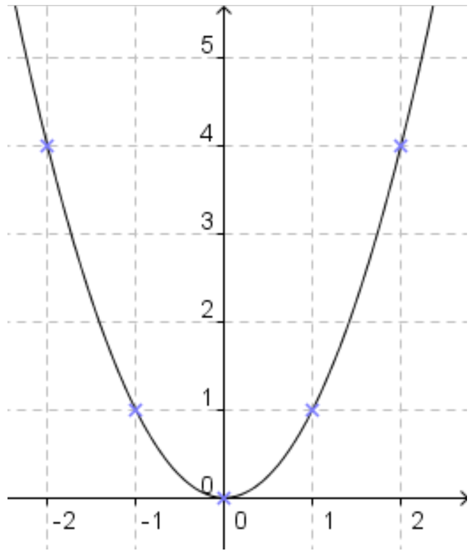
Fonctions de référence (2s)

I. Fonction carré

1. Définition

La fonction carré f est définie sur ℝ par $f(x) = x^2$.

2. Représentation graphique



x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

Rappel :
La courbe représentative de la fonction carré est constituée de l'ensemble des points de coordonnées (x ; x^2) ou (x ; $f(x)$) quand x décrit ℝ.

<u>Remarques :</u>

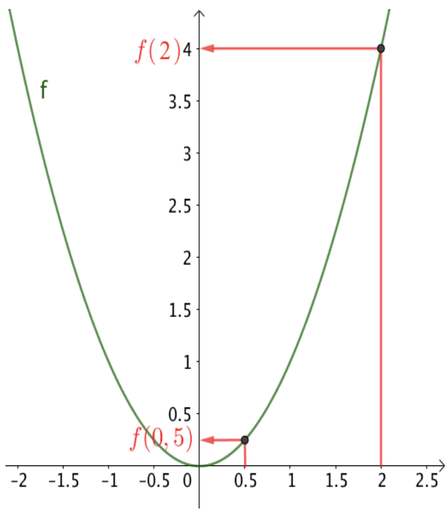
- Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carrée n'est donc pas une fonction linéaire.

- Dans un repère (O, I, J), la courbe d'équation $y=x^2$ de la fonction carré est appelée une <u>parabole</u> de sommet O.

- La fonction carré est une fonction paire donc elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées:
  Démonstration :
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, *et* $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

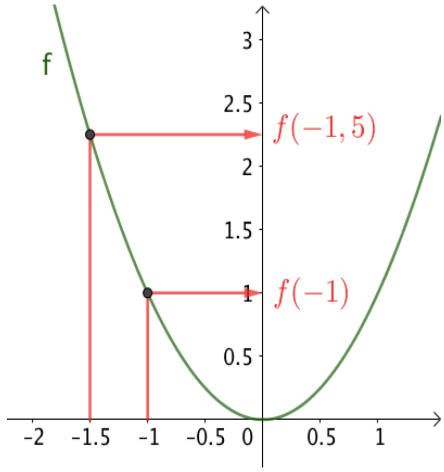
Méthode : Comparer des images

On a représenté graphiquement la fonction carré f dans un repère.
1. a. Comparer graphiquement les nombres f(0,5) et f(2).
b. Même question avec f(-1,5) et f(-1).
2. Vérifier par calcul le résultat de la question 1b.



Correction :
1. a. En traçant les images de 0,5 et de 2 par la fonction f, on constate que f(0,5)<f(2).

b. En traçant les images de -1,5 et de -1 par la fonction f, on constate que que f(-1)<f(-1,5).



2. On a $f(x)=x^2$.
Ainsi : $f(-1,5)=(-1,5)^2=2,25$.
$f(-1)=(-1)^2=2,25$.

On en déduit que f(-1)<f(-1,5).

II. Fonction inverse

1. Définition

La fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (ou $\mathbb{R}^*$) par $f(x)=\frac{1}{x}$.

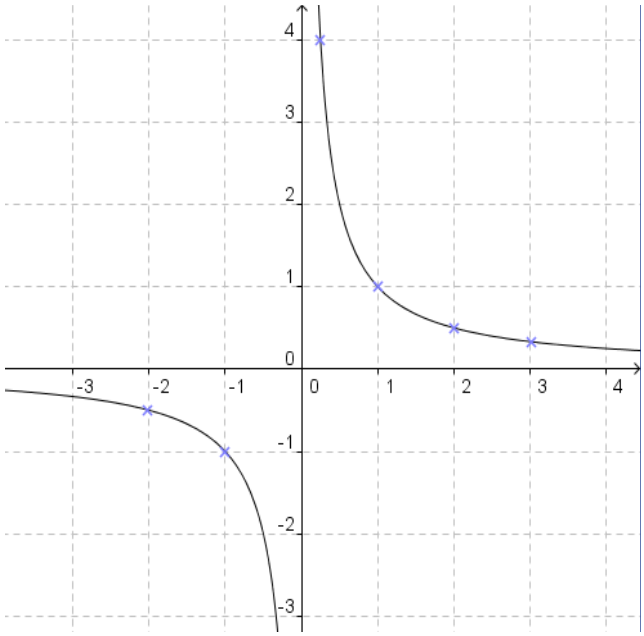
<u>Remarques :</u>

- $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire] -∞ ; 0 [U] 0 ; +∞ [. On peut aussi noter cet ensemble ℝ*.

- La fonction inverse n'est pas définie en 0.

2. Représentation graphique

x	-2	-1	0,25	1	2	3
f(x)	-0,5	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$



<u>Remarques :</u>

- Dans un repère (O, I, J), la courbe d'équation $y=\frac{1}{x}$ de la fonction inverse est une <u>hyperbole</u> de centre O.
- La fonction inverse est une fonction impaire. Elle est donc symétrique par rapport à l'origine dans un repère orthogonal.
  Démonstration :
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, et $f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$.

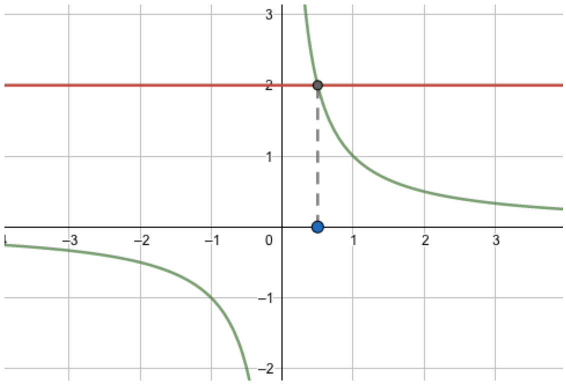
Méthode :
Soit $f(x)=\frac{1}{x}$.
1. Résoudre graphiquement $f(x)=2$ puis $f(x)<2$.
2. Retrouver ces résultats algébriquement pour f(x)=2.

Correction :

1. Tout d'abord, tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé puis tracer la droite d'équation y=2.

Graphiquement, on lit que f(x)=2 pour x=0,5.

Pour résoudre f(x)<2, on remarque que la courbe représentative de f est en-dessous de la droite y=2 sur l'intervalle : $]-\infty;0[\cup]0{,}5;+\infty[$.



Remarques :

- *On exclue 0 de l'intervalle car la fonction inverse n'est pas définie en 0.*
- *On exclue 0,5 de l'intervalle car nous sommes sur inégalité stricte.*

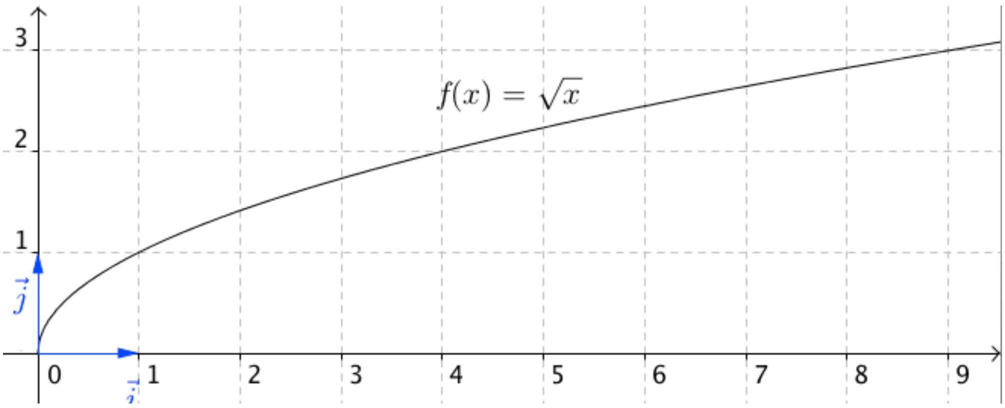
2. f(x)=2 donne $\frac{1}{x}=2$ *soit* $x=\frac{1}{2}$.

III. Fonction racine carrée

1. Définition

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ (ou $\mathbb{R}^{+}$)par f(x)=$\sqrt{x}$.

2. Représentation graphique



x	0	1	2	3	4	9
f(x)	0	1	1,41	1,73	2	3

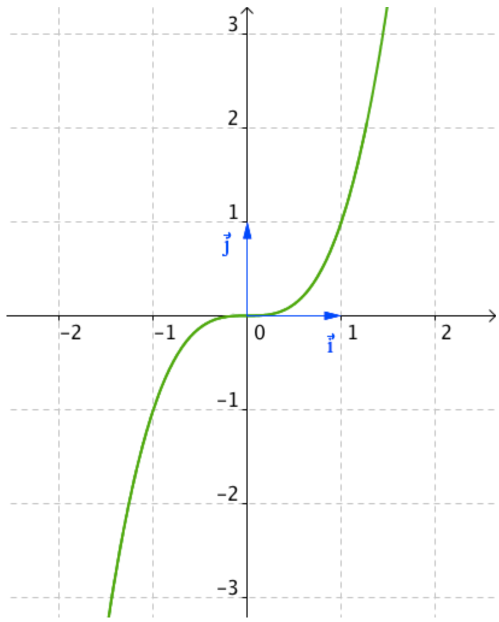
__Remarques :__

- *La fonction racine carrée n'est pas définie pour des valeurs négatives.*
- *La fonction racine carrée n'est ni paire, ni impaire car son ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.*

IV. Fonction cube

1. Définition

La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

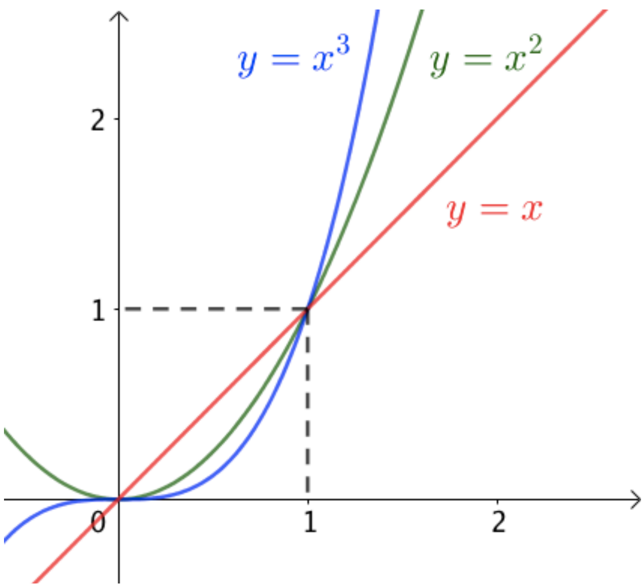


2. Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

Remarque :
La fonction inverse est une fonction impaire. Elle est donc symétrique par rapport à l'origine dans une repère orthogonal.

V. Positions relatives des courbes d'équation : *y=x, y=x² et y=x³*



Pour des valeurs positives de x, on a :

- *Si* $0 \leq x \leq 1$ *: La courbe d'équation y=x se trouve au-dessus de la courbe d'équation y=x² qui se trouve elle-même au-dessus de la courbe d'équation y=x³.*
- *Si* $x \geq 1$ *: L'ordre précédent est inversé.*

Démonstration :
Dans toute la démonstration, x est un nombre réel positif ($x \in \mathbb{R}^+$).
- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations y=x et y=x², il suffit d'étudier le signe de la différence, c'est-à-dire : $x^2 - x$.
Or, $x^2 - x = x(x-1)$ *dépend du signe de x-1, car* $x \geq 0$.
Donc, si $0 \leq x \leq 1$, *on a* $x^2 - x \leq 0$, *donc* $x^2 \leq x$.
si $x \geq 1$, on a $x^2 - x \geq 0$. *D'où,* $x^2 \geq x$.

Et donc la courbe d'équation y=x se trouve au-dessus de la courbe d'équation y=x² si $0 \leq x \leq 1$ *et en dessous si* $x \geq 1$.

- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations y=x² et y=x³, il suffit d'étudier le signe de $x^3 - x^2$.
Or, $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ *dépend du signe de x-1, car* $x^2 \geq 0$.
Donc $x^3 - x^2$ *est négatif si* $0 \leq x \leq 1$ *et positif si* $x \geq 1$.

Et donc la courbe d'équation y=x² se trouve au-dessus de la courbe d'équation y=x³ si $0 \leq x \leq 1$ *et en dessous si* $x \geq 1$.