Chapitre IX
Racines carrées (2s)

Table des matières

I. Racine carrée d'un nombre positif

Définition :
Soit a un réel positif. On appelle racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, le nombre positif dont le carré vaut a.

Cela veut dire que pour $a \geq 0$, on a $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.
Remarques :

- $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.
- Liste des carrés parfaits : il peut être intéressant pour aller plus vite dans les calculs, de connaitre les 14 premiers carrés parfaits : 0 ;1 ;4 ;9 ;16 ;25 ;36 ;49 ;64 ;81 ;100 ;121 ;144 ;169.
  La racine carré de ces nombres est un nombre entier. Par exemple, $\sqrt{121} = 11$.
- Pour certaines racines carrées nous ne pourrons donner qu'une valeur approchée (pour la valeur exacte nous garderons la racine).
  Exemple : $\sqrt{2}$ (valeur exacte)≈ 1,414 (à 10^{-3} près).

II. Opérations sur les racines carrées lien

Propriétés :

- Pour tous nombres réels positifs a et b, on a : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Pour tous nombres réels a et b positifs avec b≠0, on a : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration :
Soient a et b deux nombres réels positifs.
D'une part, $\sqrt{\mathrm{ab}}$ est le réel positif dont le carré vaut ab :$(\sqrt{\mathrm{ab}})^2 = \mathrm{ab}$.
D'autre part, $\sqrt{\mathrm{a}}$ et $\sqrt{\mathrm{b}}$ sont positifs, donc $\sqrt{\mathrm{a}} \times \sqrt{\mathrm{b}}$ est positif.
De plus, $(\sqrt{\mathrm{a}} \times \sqrt{\mathrm{b}})^2 = (\sqrt{\mathrm{a}})^2 \times (\sqrt{\mathrm{b}})^2 = a \times b = ab$.
Donc on a bien $\sqrt{\mathrm{ab}} = \sqrt{\mathrm{a}} \times \sqrt{\mathrm{b}}$.

Application : simplification de calculs mettant en jeu des racines carrées

Méthode :
1. Montrer que A=$\sqrt{50} \times \sqrt{2}$ peut s'écrire sous la forme d'un entier.
2. Écrire B=$\sqrt{32}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers et b le plus petit possible.
3. Écrire C=$2\sqrt{45} + 7\sqrt{80}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers et b le plus petit possible.
4. Écrire les fractions suivantes sans racine (radical) au dénominateur : $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{24}}$

Correction :
1. A=$\sqrt{50} \times \sqrt{2} = \sqrt{50 \times 2} = \sqrt{100} = 10$.
2. B=$\sqrt{32}$. Ici, nous allons transformer 32 en un produit, l'un des 2 facteurs étant obligatoirement un carré parfait le plus grand possible.
B=$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
3. C=$2\sqrt{45} + 7\sqrt{80} = 2\sqrt{9 \times 5} + 7\sqrt{16 \times 5} = 2\sqrt{9} \times \sqrt{5} + 7\sqrt{16} \times \sqrt{5} = 2 \times 3\sqrt{5} + 7 \times 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 28\sqrt{5} = 34\sqrt{5}$.
4. Pour retirer une racine situé au dénominateur, il suffit de multiplier dénominateur et numérateur par cette racine : $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
Dans le second, comme il y a une racine au dénominateur et au numérateur, nous allons déjà les réunir sous la même racine grâce à la formule, simplifier la fraction, puis nous serons ramenés au cas précédent.

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{4}{24}} = \sqrt{\frac{4}{4 \times 6}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Propriété :
Pour tous nombres réels strictement positifs, on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration :
Soients a et b deux nombres réels strictement positifs.
Les 2 nombres $\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{b}}$ et $\sqrt{\mathrm{a}} + \sqrt{\mathrm{b}}$ sont strictement positifs.
D'une part, $(\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{b}})^2 = \mathrm{a} + \mathrm{b}$.

D'autre part, en utilisant une identité remarquable :
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$.
Comme $2\sqrt{ab} > 0$, *on a* $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > a + b$.
D'où : $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$.
Comme $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ *sont strictement positifs, on a* $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

III. Valeur absolue et racine carrée

Propriété :

Si a est un nombre réel quelconque, alors $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \text{ est positif} \\ -a \text{ si } a \text{ est négatif} \end{cases}$.

On retrouve la définition de la valeur absolue (cf. chapitre I), notée $|a|$.

Ex. :

- $\sqrt{(6)^2} = \sqrt{36} = 6 = |6|$
-
- $\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9 = |-9|$

Démonstration :

- *Si a est positif, alors* $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.
- *Si a est négatif, alors -a est positif, d'où* $\sqrt{a^2} = \sqrt{-a \times -a} = \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = (\sqrt{-a})^2 = -a$.