Convergence quadratique de Newton

Séance 10 · Comprendre la rapidité de la méthode, fin du TP4 et synthèse 3 méthodes

Lors de la séance précédente, nous avons observé que Newton peut donner très vite une bonne approximation d'une racine. Nous allons expliquer cette rapidité en étudiant l'erreur entre une valeur calculée et la racine exacte.

I. Ce que nous voulons démontrer

On suppose que α est une racine simple de f :

$$f(\alpha) = 0; f'(\alpha) \neq 0.$$

La fonction f est de classe C^2 sur un intervalle ouvert contenant α. Autrement dit, elle possède deux dérivées continues sur cet intervalle. Newton construit la suite :

$$x_{\mathrm{n}+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Nous noterons e_n l'erreur signée au rang n. L'erreur en valeur absolue est $|e_n|$.

$$e_n = x_n - \alpha.$$

L'objectif est de montrer que, pour un départ suffisamment proche de la racine, il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$|e_{\mathrm{n}+1}| \leq K|e_n|^2.$$

Cette inégalité signifie que l'erreur suivante est contrôlée par le carré de la précédente. Le facteur K compte aussi : l'erreur doit déjà être suffisamment petite pour que cette relation explique une amélioration rapide.

Rappel utile de Taylor-Lagrange

Si f est de classe C^2 sur un intervalle contenant a et x, avec $x \neq a$, il existe un nombre ξ strictement compris entre ces deux points tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2.$$

Nous n'avons besoin que de cette formule à l'ordre 1, avec un reste du second ordre. Le point ξ dépend des deux points utilisés ; nous ne connaissons généralement pas sa valeur.

II Une relation exacte sur l'erreur

1 Choisir le bon point de développement

Appliquons Taylor-Lagrange entre x_n et α, en développant au point courant x_n. Si $x_n = \alpha$, la racine est déjà trouvée. Sinon, il existe ξ_n entre x_n et α tel que :

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2.$$

Comme $f(\alpha) = 0$ et $e_n = x_n - \alpha$, cette égalité devient :

$$0 = f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{f''(\xi_n)}{2}{e_n}^2.$$

On isole le terme que l'on retrouve dans la formule de Newton :

$$f(x_n) = f'(x_n)e_n - \frac{f''(\xi_n)}{2}{e_n}^2.$$

2 Utiliser la formule de Newton

En soustrayant α à la relation de récurrence, on obtient :

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

On remplace ensuite $f(x_n)$ par l'expression précédente et on simplifie :

$$e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}{e_n}^2.$$

Cette relation est exacte tant que l'itération est définie. Aucun remplacement approximatif de la dérivée n'a été nécessaire. Le signe du coefficient dépend des dérivées ; ce sont les valeurs absolues qui permettent de contrôler la taille de l'erreur.

3 En déduire une majoration locale

Puisque f' est continue et $f'(\alpha) \neq 0$, on peut choisir un petit intervalle fermé J autour de α sur lequel :

$$|f'(x)| \geq m > 0; |f''(x)| \leq M.$$

La seconde borne vient de la continuité de f'' sur cet intervalle fermé et borné. Pour $x_n \in J$, la relation exacte donne :

$$|e_{n+1}| \leq \frac{M}{2m}|e_n|^2.$$

On peut donc prendre $K = \frac{M}{2m}$. Choisissons un rayon $r > 0$ tel que l'intervalle centré en α de rayon r soit inclus dans J et que $Kr < 1$. Si $|e_0| \leq r$, chaque erreur reste dans cet intervalle et décroît au moins géométriquement. La suite est définie et converge vers α, avec la majoration quadratique ci-dessus.

III Interpréter le résultat

Ordre deux et constante asymptotique

Lorsque les erreurs ne sont pas nulles, si la suite converge vers α, le point intermédiaire ξ_n converge lui aussi vers α. La relation exacte permet alors de passer à la limite dans le quotient :

$$\frac{e_{n+1}}{{e_n}^2} \to \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

En valeur absolue, la constante asymptotique est donc :

$$\mathrm{C} = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}.$$

Si $f''(\alpha) \neq 0$, cette constante est strictement positive : on parle de convergence d'ordre exactement deux. Si $f''(\alpha) = 0$, la majoration quadratique demeure valable, mais la convergence peut être plus rapide. Il faut alors des informations supplémentaires pour préciser l'ordre. Si la racine est atteinte exactement, on arrête le calcul et le quotient des erreurs n'a plus à être évalué.

Un exemple connu avec la méthode de Héron

Pour approcher $\sqrt{2}$, on prend $f(x) = x^2 - 2$ et un départ positif. En notant $\alpha = \sqrt{2}$, on obtient :

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}; e_{n+1} = \frac{{e_n}^2}{2x_n}.$$

Lorsque x_n s'approche de $\sqrt{2}$, le coefficient s'approche de :

$$\mathrm{C} = \frac{1}{2\alpha} \approx 0{,}353553.$$

Par exemple, une erreur déjà voisine d'un millième conduit approximativement à :

$$|e_n| \approx 10^{-3} \Rightarrow |e_{n+1}| \approx 0{,}353553 \times 10^{-6} \approx 3{,}54 \times 10^{-7}.$$

On comprend ainsi pourquoi le nombre de chiffres corrects peut à peu près doubler à chaque étape, une fois la phase de convergence rapide atteinte. Ce n'est pas une règle exacte valable dès le premier tour.

Ce qu'il faut retenir

Le résultat est local : il faut partir suffisamment près d'une racine simple. Il explique la rapidité de Newton quand la méthode converge dans ces conditions ; il ne garantit pas le succès pour n'importe quel départ.

Enfin, l'erreur utilise la racine exacte et ne sert donc pas directement de critère d'arrêt lorsqu'elle est inconnue. On conserve les contrôles de la séance précédente : déplacement, résidu et nombre maximal d'itérations. Sur machine, les arrondis finissent par limiter les gains observés.