Manipuler les expressions algébriques

Cours 01 Du calcul aux formules scientifiques

UTC101 • Licence 3 • 3 h 30, cours et exercices compris

Transformer une expression, isoler une grandeur et combiner des relations sont les objectifs de cette séance. Le parcours comprend vingt exercices progressifs et trois applications scientifiques. Les applications font partie du travail prévu pour tous les étudiants.

Les propriétés et les exemples corrigés servent de référence pendant les exercices. Utiliser une calculatrice pour les applications numériques ; conserver une écriture exacte avant d'arrondir. Les réponses longues peuvent être poursuivies sur une feuille.

Parcours principal	Durée indicative
Diagnostic et reprise ciblée	10 min
1 Polynômes et calcul littéral Exercices 1 à 4	25 min
2 Géométrie et formules Exercices 5 à 8	30 min
3 Puissances et racines Exercices 9 à 12	30 min
4 Exponentielle et logarithmes Exercices 13 à 16	35 min
5 Valeur absolue et inégalités Exercices 17 à 20	25 min
Applications scientifiques 1 à 3	45 min
Bilan et ajustements selon les difficultés	10 min
Total	3 h 30

Diagnostic 10 minutes

Sans calculatrice. Ces questions ne sont pas notées ; elles orientent la reprise des méthodes. Revenir sur les réponses en fin de séance.

a. Développer $(x + 2)^2$. b. Simplifier $x^3 x^{-1}$ pour x ≠ 0.

.....

.....

c. Isoler h dans $V = L \times l \times h$ avec L > 0 et l > 0.

.....

d. Calculer $ln(e^2)$ et $|-3|$.

.....

Pour chaque résultat : écrire les étapes, préciser les valeurs autorisées et vérifier les unités lorsqu'il s'agit d'une grandeur physique.

1 Polynômes et calcul littéral 25 minutes

Repères et exemple : environ 8 minutes. Exercices 1 à 4, sur cette page et la suivante : environ 17 minutes, correction comprise.

Du nombre au polynôme

$$2027 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10 + 7$$

En remplaçant 10 par x, on obtient $P(x) = 2x^3 + 2x + 7$. Cette analogie fait apparaître les coefficients et les puissances de la variable.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Les coefficients sont réels et les exposants sont des entiers positifs ou nuls. Le symbole Σ demande d'additionner les termes pour les indices indiqués. Le degré d'un polynôme non nul est le plus grand exposant dont le coefficient est non nul. Une constante non nulle est de degré 0 ; le degré du polynôme nul n'est pas défini ici.

Développer réduire et factoriser

$$a(b + c) = ab + ac, \quad ab + ac = a(b + c)$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Développer transforme un produit en somme ; réduire regroupe les termes de même puissance. Factoriser transforme une somme en produit. Les identités ci-dessus sont valables pour tous réels a et b.

Exemple corrigé

$$(x - 1)(x + 2) + 3(x - 1) = (x - 1)(x + 5)$$

Le facteur commun est toute la parenthèse (x − 1). Développer n'est pas toujours le chemin le plus court.

Exercice 1 Lire une expression

a. Calculer P(2). b. Développer la somme $\sum_{k=0}^{3} a_k x^k$.

.....

.....

.....

c. Parmi $3x^2 - x + 1$; $\frac{1}{x} + 2$; $\sqrt{x}$; 5, reconnaître les polynômes et donner leur degré.

.....

.....

.....

Exercice 2 Développer sans perdre les signes

$$A(x) = (x + 2)(x - 3) - 2(x - 1)$$

Développer et réduire A. Vérifier le résultat en calculant A(0) dans les deux écritures.

.....

.....

.....

1 Choisir et justifier une transformation

Exercice 3 Factoriser pour résoudre

a. Factoriser $B(x) = 5x^2 - 15x$.

.....

.....

b. Factoriser $C(x) = (x - 1)(2x + 3) + 4(x - 1)$.

.....

.....

c. Factoriser $D(x) = x^2 - 6x + 9$, puis résoudre D(x) = 0.

.....

.....

.....

Exercice 4 Simplifier avec les bonnes conditions

On considère $F(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

a. Pour quelles valeurs réelles de x cette expression est-elle définie ?

.....

b. Factoriser le numérateur et simplifier F en conservant la condition sur x.

.....

.....

.....

c. Peut-on utiliser l'expression de départ pour calculer $F(3)$? Expliquer.

.....

.....

d. Un étudiant écrit $(x + 2)^2 = x^2 + 4$. Donner un contre-exemple numérique et corriger l'identité.

.....

.....

Méthode à retenir

Dans un quotient, on simplifie des facteurs communs non nuls. On ne supprime pas un terme dans une somme. Conserver les exclusions de l'expression de départ, même lorsqu'elles ne sont plus visibles après simplification.

Une vérification numérique peut révéler une erreur. Quelques valeurs concordantes ne prouvent pas qu'une identité est vraie pour tout x.

Pour ceux qui ont terminé

Trouver deux expressions différentes en apparence qui donnent le même polynôme, puis le prouver par développement. Utiliser au moins une identité remarquable.

.....

.....

2 Géométrie et formules 30 minutes

Méthode et exemple : 5 minutes. Exercices 5 à 8 : 25 minutes, correction comprise. Les longueurs sont strictement positives.

Figure	Relations utiles
Rectangle	$P = 2(L + l), \quad S = L \times l$
Carré	$P = 4a, \quad S = a^2$
Cercle et disque	$P = 2\pi R, \quad S = \pi R^2$
Pavé rectangle	$S = 2(L \times l + L \times h + l \times h), \quad V = L \times l \times h$
Cube fermé	$S = 6a^2, \quad V = a^3$
Sphère et boule	$S = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Exemple corrigé Isoler puis substituer

$$P = 4a \Rightarrow a = \frac{P}{4} \Rightarrow S = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$$

Effectuer la même opération des deux côtés de l'égalité. Lorsqu'une longueur est obtenue par racine carrée, retenir la solution positive.

Exercice 5 Exprimer une aire

Exprimer l'aire du disque uniquement en fonction du périmètre du cercle.

.....

.....

Exercice 6 Conserver les conditions géométriques

Exprimer la largeur du rectangle, puis son aire, en fonction de P et L. Quelle condition sur P et L garantit une largeur strictement positive ?

.....

.....

.....

Exercice 7 Passer de la surface au volume

a. Pour le cube, exprimer l'arête puis le volume en fonction de S. Calculer le volume lorsque S = 54 m².

.....

.....

b. Pour une boule, exprimer le rayon puis le volume en fonction de la surface de la sphère. Conserver les racines si nécessaire.

.....

.....

Exercice 8 Discuter une relation

Comparer les surfaces totales et les volumes de deux pavés de dimensions $(1\ ;\ 1\ ;\ 4)$ et $(1\ ;\ 2\ ;\ \frac{7}{3})$, en mètres. La surface totale suffit-elle à déterminer le volume d'un pavé quelconque ?

.....

.....

3 Puissances et racines 30 minutes

Repères et exemple : 8 minutes. Exercices 9 à 12, sur cette page et la suivante : 22 minutes, correction comprise.

Définir les exposants

Pour un entier n ≥ 1, x^n est le produit de n facteurs égaux à x. Si x ≠ 0 :

$$x^0 = 1, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Pour les exposants réels, on travaille ici avec une base strictement positive. Pour x > 0, p entier et q entier strictement positif :

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \quad x^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{x})^3 = x\sqrt{x}$$

Plus généralement, $x^{\frac{p}{q}}$ est la racine q-ième positive de x^p. Une puissance négative est un inverse ; elle ne signifie pas « nombre négatif ».

Règles pour x et y strictement positifs

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}, \quad (xy)^a = x^a y^a$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \quad \text{pour tous réels } a \text{ et } b$$

Exemple corrigé

$$\frac{x^5 \times x^{-2}}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{5-2-\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

On additionne les exposants au numérateur, puis on soustrait celui du dénominateur. On peut aussi écrire le résultat sous la forme $x\sqrt{x}$.

Exercice 9 Calculer et reconnaître les domaines

Calculer 2^{-3} ; $16^{\frac{3}{2}}$; $27^{\frac{2}{3}}$; $81^{\frac{-1}{2}}$. Écrire les étapes.

.....

.....

.....

En nombres réels, peut-on calculer $\sqrt{-4}$? Et $\frac{1}{\sqrt{0}}$? Justifier.

.....

.....

3 Combiner les puissances et les paramètres

Exercice 10 Réunir les facteurs

Pour x > 0 et y > 0, simplifier et écrire les résultats avec des exposants positifs.

$$A = \frac{x^3 x^{-5}}{x^4 x^{-2}}, \quad B = \frac{x^{\frac{5}{2}} y^{-1}}{x^{\frac{1}{2}} y^2}, \quad C = \left(\frac{2x^2}{y}\right)^3$$

.....

.....

.....

.....

Exercice 11 Interpréter un exposant fractionnaire

a. À partir de $a = \sqrt{\frac{S}{6}}$ et $V = a^3$, retrouver $V = \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$.

.....

.....

b. Toutes les longueurs d'un objet sont multipliées par k > 0. Donner les facteurs de multiplication de ses surfaces et de son volume.

.....

.....

c. Le volume est multiplié par 125. Par quels facteurs les longueurs et les surfaces sont-elles multipliées ?

.....

.....

Exercice 12 Isoler une vitesse de rotation

Deux dispositifs semblables vérifient la relation suivante. Les vitesses de rotation et les diamètres sont strictement positifs.

$$N_1{}^3 d_1{}^2 = N_2{}^3 d_2{}^2$$

a. Isoler N_2^3, puis exprimer N_2 en fonction de N_1, d_1 et d_2.

.....

.....

.....

b. Calculer N_2 pour $d_1 = 9{,}2\ cm$, $d_2 = 92\ cm$ et $N_1 = 300\ min^{-1}$. Donner un résultat au dixième.

.....

.....

Avant de former un rapport de longueurs, utiliser la même unité. Dans cette relation, les vitesses de rotation sont élevées au cube et les diamètres au carré : leurs facteurs d'échelle sont différents.

4 Exponentielle et logarithmes 35 minutes

Repères et exemple : 10 minutes. Exercices 13 à 16, sur cette page et la suivante : 25 minutes, correction comprise.

Puissance ou exponentielle

Dans x^2, la variable est dans la base. Dans 2^x, elle est dans l'exposant. Plus généralement, une exponentielle de base a > 0 est x ↦ a^x.

L'exponentielle naturelle est notée exp(x) ou e^x, avec e ≈ 2,71828. Elle est définie sur les réels, strictement positive et strictement croissante.

$$e^0 = 1, \quad e^{a+b} = e^a e^b, \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

Le logarithme naturel est la réciproque

$$e^x = y \Leftrightarrow x = ln(y) \quad pour\ y > 0$$

$$ln(e^x) = x \quad pour\ x\ réel, \quad e^{ln(y)} = y \quad pour\ y > 0$$

Pour a > 0, b > 0 et r réel :

$$ln(ab) = ln(a) + ln(b), \quad ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$$

$$ln(a^r) = r\, ln(a), \quad ln(1) = 0, \quad ln(e) = 1$$

Le logarithme décimal et les notations

$$log_{10}(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}, \quad log_{10}(10^r) = r \quad pour\ x > 0$$

La touche ln calcule le logarithme naturel ; la touche log d'une calculatrice scientifique usuelle calcule le logarithme décimal. Dans le support de référence de 2018, « log » désigne aussi le logarithme naturel : nous écrivons ln pour éviter cette ambiguïté.

Exemple corrigé Isoler une inconnue dans un exposant

$$3e^{0,2t} = 12 \Leftrightarrow e^{0,2t} = 4 \Leftrightarrow 0,2t = ln(4)$$

$$t = \frac{ln(4)}{0,2} \approx 6,93$$

Isoler l'exponentielle, appliquer ln, puis isoler l'inconnue. Vérifier auparavant que l'argument du logarithme est strictement positif.

Exercice 13 Calculer avec les deux logarithmes

Calculer $ln(e^{-3})$; $e^{ln(7)}$; $log_{10}(1000)$; $log_{10}(0,01)$.

.....

.....

Pourquoi ln(0) et ln(−2) ne sont-ils pas définis dans les réels ?

.....

4 Résoudre puis interpréter un modèle

Exercice 14 Simplifier avec les propriétés

$$A = ln(\frac{e^5 \times e^2}{e^{-3}})$$

a. Calculer A. b. Pour x > 0, simplifier $B = ln(\frac{3x^2}{2}) - 2\,ln(x)$.

.....

.....

.....

c. Un étudiant écrit $ln(a + b) = ln(a) + ln(b)$. Tester avec a = b = 1, puis conclure.

.....

.....

Exercice 15 Isoler une inconnue

Résoudre dans les réels : a. $e^{0,5x} = 8$. b. $2e^{-0,3t} = 0,5$. c. $ln(3x - 1) = 2$.

Pour la dernière équation, commencer par préciser le domaine. Donner les solutions exactes ; arrondir les deux premières au centième.

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 16 Du facteur multiplicatif à la durée

Une culture contient initialement 1000 bactéries. On suppose qu'elle suit une croissance exponentielle et qu'elle double toutes les six heures. Le temps t est mesuré en heures.

a. Écrire la population P(t) pour t ≥ 0. Vérifier la valeur initiale et le doublement à six heures.

.....

.....

b. Calculer la population après 24 heures.

.....

c. Déterminer au bout de combien de temps la population est multipliée par dix. Donner une expression exacte et une approximation au centième d'heure.

.....

.....

.....

Si vous bloquez uniquement sur la modélisation, poursuivre avec $P(t) = 1000 \times 2^{\frac{t}{6}}$. Cette aide permet de travailler la résolution de l'équation indépendamment de la question a.

5 Valeur absolue et inégalités 25 minutes

Repères et exemple : 7 minutes. Exercices 17 à 20 : 18 minutes, correction comprise.

Distance et propriétés

La valeur absolue de x est sa distance à zéro : |x| = x si x ≥ 0 et |x| = −x si x < 0. La distance entre deux réels x et a est |x − a|. Pour tous réels x et y :

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad |xy| = |x||y|, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

La racine carrée est toujours positive ou nulle : √(x²) n'est pas toujours égale à x. Une valeur absolue est nulle si et seulement si le nombre est nul.

Tolérances et transformation des inégalités

$$|x - a| \leq \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon \quad pour\ \varepsilon \geq 0$$

Ajouter la même quantité aux deux membres conserve le sens d'une inégalité. Multiplier ou diviser par un nombre strictement positif conserve le sens ; par un nombre strictement négatif, inverse le sens. Vérifier le signe avant de transformer.

Exemple corrigé

$$-2x < 6 \iff x > -3$$

On divise par −2, donc on inverse le sens. Une division par une expression dont le signe est inconnu nécessite une discussion de cas.

Exercice 17 Calculer et résoudre

Calculer $\sqrt{(-5)^2}$ et $|3 - 7|$. Résoudre $|x - 3| = 2$.

.....

.....

Exercice 18 Passer de la distance à un intervalle

Un diamètre D en mm doit différer de 50 mm de strictement moins de 0,5 mm. Écrire la condition avec une valeur absolue puis donner l'intervalle accepté.

.....

.....

Exercice 19 Comparer des valeurs absolues

a. Comparer $|3 + (-2)|$ et $|3| + |-2|$. b. Montrer que $\frac{|x|}{1+|x|} < 1$ pour tout réel x.

.....

.....

.....

Exercice 20 Isoler une grandeur dans une inégalité

a. Résoudre $5 - 2x \leq 9$. b. Pour Q > 0, u > 0 et L > 0, exprimer la condition $\frac{Q}{L \times l} < u$ sous la forme d'une condition sur l > 0. Justifier le signe des facteurs utilisés.

.....

.....

.....

Application scientifique 1 Un débit à déterminer

15 minutes, correction comprise • Combiner deux relations avec une étape intermédiaire

Un dispositif de mesure est décrit par les deux relations admises suivantes :

$$(\rho' - \rho)gh = \frac{1}{2}\rho u^2[(\frac{D}{d})^4 - 1]$$

$$Q_v = \frac{\pi D^2}{4}u$$

ρ et ρ′ sont des masses volumiques en kg/m³, g une accélération en m/s², h une hauteur en m, D et d des diamètres en m, u une vitesse en m/s et Q_v un débit volumique en m³/s.

On suppose ρ′ > ρ > 0, g > 0, h > 0, D > d > 0 et u > 0. Aucune connaissance du fonctionnement du dispositif n'est nécessaire pour effectuer les transformations.

1 Identifier les valeurs autorisées

Expliquer pourquoi $(\frac{D}{d})^4 - 1$ est strictement positif. Pourquoi pourra-t-on retenir une racine carrée positive pour u ?

.....

.....

.....

2 Isoler la vitesse

Exprimer u^2, puis u, uniquement en fonction de ρ, ρ', g, h, D et d.

.....

.....

.....

.....

.....

3 Éliminer la variable intermédiaire

En déduire une expression de Q_v ne contenant plus u. Présenter une expression exacte ; plusieurs écritures équivalentes sont possibles.

.....

.....

.....

.....

4 Contrôler le résultat

Avec les autres paramètres fixés, la hauteur h est multipliée par quatre. Par quel facteur le débit est-il multiplié ? Vérifier également l'unité de l'expression située sous la racine dans votre formule de u.

.....

.....

.....

Méthode de contrôle : le facteur entre crochets est sans dimension. Une vitesse au carré doit être homogène à m²/s².

Application scientifique 2 Une vitesse de chute

15 minutes, correction comprise • Substituer et simplifier une expression avec plusieurs paramètres

On définit deux nombres sans dimension par les relations suivantes :

$$A_r = \frac{{d_p}^3 g(\rho_p - \rho_f)\rho_f}{\mu^2}$$

$$Re_t = \frac{\rho_f u_t d_p}{\mu}$$

Dans le régime étudié, on admet :

$${Re_t}^2 = 3A_r$$

d_p est un diamètre en m ; g une accélération en m/s^2 ; ρ_p et ρf des masses volumiques en kg/m^3 ; μ une viscosité dynamique en Pa·s ; u_t une vitesse en m/s.

Toutes ces grandeurs sont strictement positives et $\rho_p > \rho f$. On considère la vitesse positive u_t. Les relations sont fournies : le travail porte sur leur transformation algébrique.

1 Éliminer les nombres intermédiaires

Remplacer R_{et} et A_r par leurs expressions dans l'égalité $R_{et}^2 = 3A_r$. Écrire une seule relation contenant u_t et les paramètres physiques.

.....

.....

.....

.....

2 Isoler et simplifier

Exprimer u_t^2 puis u_t en fonction de d_p, g, ρ_p et ρf. Simplifier les facteurs communs et justifier le choix du signe.

.....

.....

.....

.....

.....

3 Interpréter les simplifications

La viscosité μ apparaît-elle encore dans le résultat ? Si le diamètre d_p est multiplié par quatre et que les autres paramètres restent fixes, comment évolue la vitesse dans ce modèle ?

.....

.....

.....

4 Contrôler les unités

Vérifier que le résultat obtenu a l'unité d'une vitesse.

.....

.....

Rappel pour l'unité : un rapport de deux masses volumiques a la dimension 1, c'est-à-dire qu'il est sans dimension.

Application scientifique 3 Identifier un coefficient

15 minutes, correction comprise • Choisir la démarche de façon autonome

Un écoulement dans un milieu poreux est décrit par les relations admises :

$$\frac{\Delta P}{L} = h_K {a_p}^2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \mu u_s$$

$$Q_v = \frac{B}{\mu} \Omega \frac{\Delta P}{L}, \quad u_s = \frac{Q_v}{\Omega}$$

ΔP est une différence de pression, L une longueur, μ une viscosité, Ω une aire de section, Q_v un débit volumique, u_s une vitesse et B une perméabilité. Le coefficient hK est sans dimension, a_p est une aire par unité de volume (unité m^{-1}) et ε est une porosité sans dimension.

Toutes les grandeurs sont strictement positives et $0 < \varepsilon < 1$. Les unités SI sont utilisées. On ne demande aucune démonstration des lois physiques.

Travail demandé

Exprimer B uniquement en fonction de hK, a_p et ε. Organiser les substitutions, simplifier les facteurs et vérifier que votre résultat s'exprime en m^2.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Si ε et hK restent fixes et que a_p est multiplié par deux, comment évolue B ? Justifier.

.....

.....

Bilan de la séance 10 minutes

Revenir au diagnostic, corriger les réponses et identifier une difficulté résolue. La marge prévue permet aussi de terminer la correction d'une application selon les besoins du groupe.

Avant de valider un résultat	Vérification
Valeurs autorisées	Dénominateurs non nuls, arguments des logarithmes positifs, racines réelles
Égalité ou inégalité	Même opération des deux côtés ; signe contrôlé
Écriture	Facteurs distingués des termes ; simplifications justifiées
Grandeur physique	Unités et effet d'un changement de paramètre