Dérivation et tangente à une courbe

Cours 02 Comprendre et calculer une dérivée

UTC101 • Licence 3 • Une séance de 3 h 30

Une dérivée mesure une variation instantanée et donne la pente d'une tangente. Elle permet aussi de remplacer localement une fonction par une fonction affine, pour estimer une valeur ou l'effet d'une petite variation.

Le cours relie ces interprétations aux méthodes de calcul. Les exemples sont rédigés ; les exercices servent à les réutiliser. Les exercices indiqués « à reprendre chez soi » complètent le parcours prioritaire. Conserver les étapes et préciser les domaines avant de simplifier.

Parcours de la séance	Durée
Diagnostic	10 min
1 Fonctions linéaires affines et intervalles	20 min
2 Approximation locale nombre dérivé et tangente	35 min
3 Fonction dérivée et règles de calcul	45 min
4 Dérivée d'une fonction composée	40 min
5 Dérivée d'une fonction réciproque	30 min
6 Exercices de synthèse	20 min
Questions et ajustements	10 min
Total	3 h 30

Diagnostic Sans calculatrice

a. Une droite passe par A(1 ; 3) et B(3 ; 7). Calculer sa pente.

.....

b. Développer $(a + h)^2 - a^2$.

.....

c. Écrire $\frac{1}{x^3}$ comme une puissance de x, pour $x \neq 0$.

.....

d. Compléter : $e^{ln(5)} = \ldots$ et $ln(e^2) = \ldots$.

.....

1 Fonctions linéaires et affines

1 1 Une fonction linéaire traduit une proportionnalité

$$f(x) = mx$$

Le réel m est fixe. La représentation est une droite passant par l'origine. Par exemple, si la section S d'un tuyau est constante, le débit volumique Q est proportionnel à la vitesse moyenne u :

$$Q(u) = Su$$

La pente est S. Si S = 0,02 m², une augmentation de vitesse de 1 m/s augmente le débit de 0,02 m³/s.

1 2 Une fonction affine possède une pente et une valeur initiale

$$f(x) = mx + b$$

m est le coefficient directeur, ou pente ; b est l'ordonnée à l'origine. Une fonction linéaire est une fonction affine dont b = 0. Si m = 0, la fonction est constante.

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad pour\ x_1 \neq x_2$$

Le numérateur est la variation de la sortie ; le dénominateur est la variation de l'entrée. Pour une fonction affine, ce rapport est constant. Si m > 0, la fonction est strictement croissante ; si m < 0, elle est strictement décroissante.

Exemple corrigé Lire une loi de capteur

La tension d'un capteur vérifie $U(T) = 0{,}02T + 0{,}5$, avec T en °C et U en V.

$$U(20) = 0{,}02 \times 20 + 0{,}5 = 0{,}9$$

À 20 °C, le capteur délivre 0,9 V. La pente 0,02 V/°C indique une augmentation de 0,02 V par degré ; 0,5 V est la tension à 0 °C. Pour retrouver T :

$$U = 0{,}02T + 0{,}5 \iff U - 0{,}5 = 0{,}02T \iff T = \frac{U - 0{,}5}{0{,}02}$$

On soustrait 0,5 aux deux membres puis on divise par 0,02. Le résultat donne la température en °C lorsque U est exprimée en V.

Exercice 1 Retrouver une loi affine

Parcours prioritaire.

Un autre capteur donne $U(10) = 0{,}8\,V$ et $U(40) = 1{,}4\,V$. On suppose U affine. Calculer sa pente, déterminer $U(T)$, puis retrouver T lorsque $U = 1{,}1\,V$. La relation est-elle linéaire ?

.....

.....

.....

.....

1 Applications entre deux intervalles

1 3 Préciser les entrées et les sorties

$$f : I \to J, \quad x \mapsto f(x)$$

Cette notation signifie qu'à chaque réel x de I, la fonction associe un unique réel $f(x)$ appartenant à J. I est l'intervalle de départ et J l'intervalle d'arrivée. Le domaine de définition rassemble les entrées pour lesquelles la formule a un sens ; I peut être une restriction de ce domaine.

À retenir. L'image $f(I)$ est l'ensemble des valeurs effectivement atteintes. On doit avoir $f(I) \subset J$, mais l'égalité n'est pas obligatoire.

Exemple corrigé Une formule et deux intervalles

$$f(x) = 1 + x^2 \quad pour\, x \in [0\,;\,1]$$

Sur [0 ; 1], x^2 prend toutes les valeurs de 0 à 1. Ainsi f($[0\,;\,1]$) $= [1\,;\,2]$. On peut choisir $J = [1\,;\,2]$, mais aussi $J = \mathbb{R}$. Choisir $J = [0\,;\,1]$ ne convient pas, car $f(1) = 2$ n'appartient pas à cet intervalle.

La formule ln(x) est définie pour $x > 0$. La formule $\sqrt{x}$ est définie pour $x \geq 0$. Une dérivation pourra imposer des conditions plus strictes : $\sqrt{x}$ sera dérivable pour $x > 0$.

Exercice 2 Déterminer les valeurs atteintes

Parcours prioritaire.

a. Pour $f(x) = 2x - 1$ sur I = [0 ; 3], donner f(I). Les choix J = $\mathbb{R}$ et J = [−1 ; 5] conviennent-ils ?

.....

.....

b. Pour $g(x) = x^2$ sur I = [−2 ; 3], donner g(I). Pourquoi le seul calcul des images des deux bornes ne suffit-il pas ici ?

.....

.....

Exercice 3 Vérifier un domaine

À reprendre chez soi ou pour aller plus loin.

Déterminer les domaines de définition réels de $r(x) = \frac{1}{x-2}$, $s(x) = ln(x - 1)$ et $t(x) = \sqrt{3 - x}$. Écrire les conditions avant de donner les intervalles.

.....

.....

.....

Lien avec la suite

Avant de calculer une dérivée en a, on vérifie que la fonction est définie près de a. Dans ce cours, la dérivée en un point est étudiée à l'intérieur d'un intervalle ; les limites à une extrémité seront seulement évoquées pour expliquer certains cas de non-dérivabilité.

2 Approcher une courbe par une droite

2 1 Un exemple qui relie le calcul au graphique

$$f(x) = 1 + x^2, \quad a = \frac{1}{2}, \quad f(a) = \frac{5}{4}$$

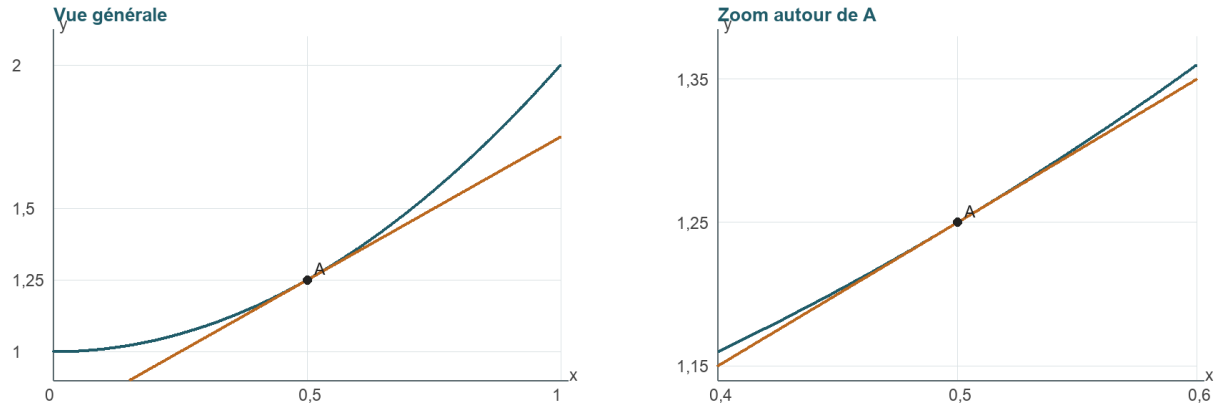
Pour étudier les valeurs proches de a, on écrit $x = a + h$. Le réel h est l'écart à a ; il peut être positif ou négatif. On développe exactement :

$$f\left(\frac{1}{2} + h\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} + h\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \times h + h^2 = \frac{5}{4} + h + h^2$$

Si |h| est petit, h² est encore plus petit. En négligeant seulement ce dernier terme, on obtient une approximation affine :

$$f\left(\frac{1}{2} + h\right) \approx \frac{5}{4} + h, \quad soit \quad f(x) \approx \frac{5}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)$$



Bleu pétrole : f(x) = 1 + x². Orange : la droite y = 5/4 + (x − 1/2). Les deux vues représentent les mêmes fonctions.

Les courbes se rapprochent près de A. Elles ne sont pas confondues : l'erreur exacte est h², et l'approximation sous-estime ici la valeur de f.

Exercice 4 Mesurer l'erreur de l'approximation

Parcours prioritaire.

Compléter le tableau, puis estimer f(0,51) avec la formule affine. Donner l'erreur absolue exacte de cette estimation.

h	Valeur exacte de f(1/2 + h)	Approximation 5/4 + h	Erreur absolue
0,1			
0,01			
−0,01			

.....

.....

2 Du taux d'accroissement au nombre dérivé

2 2 La pente d'une sécante

Une sécante passe par deux points distincts de la courbe, d'abscisses a et a + h. Sa pente vaut :

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad pour\ h \neq 0$$

Ce rapport est le taux d'accroissement entre a et a + h. Il mesure une variation moyenne. Dans notre exemple :

$$\frac{f(\frac{1}{2} + h) - f(\frac{1}{2})}{h} = \frac{\frac{5}{4} + h + h^2 - \frac{5}{4}}{h}$$

$$= \frac{h + h^2}{h} = \frac{h(1 + h)}{h} = 1 + h \quad pour\ h \neq 0$$

Quand h se rapproche de zéro, par valeurs positives ou négatives, 1 + h se rapproche de 1. La pente des sécantes tend donc vers 1. On ne remplace pas h par 0 dans le quotient de départ : il n'y serait pas défini.

2 3 Définition du nombre dérivé

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant a. Si le taux d'accroissement admet une limite réelle finie lorsque h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a. Cette limite est le nombre dérivé f'(a).

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La limite exprime le comportement du quotient pour h non nul et arbitrairement proche de zéro. Les approches à gauche et à droite doivent conduire au même réel.

$$Pour\ f(x) = 1 + x^2, \quad f'(\frac{1}{2}) = 1$$

Exemple corrigé Généraliser le même calcul

$$f(a + h) - f(a) = 1 + (a + h)^2 - (1 + a^2)$$

$$= a^2 + 2ah + h^2 - a^2 = 2ah + h^2$$

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = 2a + h \to 2a$$

Pour tout réel a, le nombre dérivé est donc f'(a) = 2a. Le coefficient dépend du point choisi : il vaut 0 en 0, 1 en 1/2 et 2 en 1.

Exercice 5 Revenir à la définition

Parcours prioritaire.

Pour $g(x) = 3x + 2$, calculer $g(a + h) - g(a)$, puis le taux d'accroissement. En déduire $g'(a)$. Pourquoi le résultat ne dépend-il pas de a ?

.....

.....

.....

2 Tangente et approximation locale

2 4 Écrire la tangente au bon point

Si f est dérivable en a, la tangente en $A(a\,;\,f(a))$ a pour pente $f'(a)$ et passe par A. Son équation est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

La même expression définit l'approximation affine de f au voisinage de a :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$$

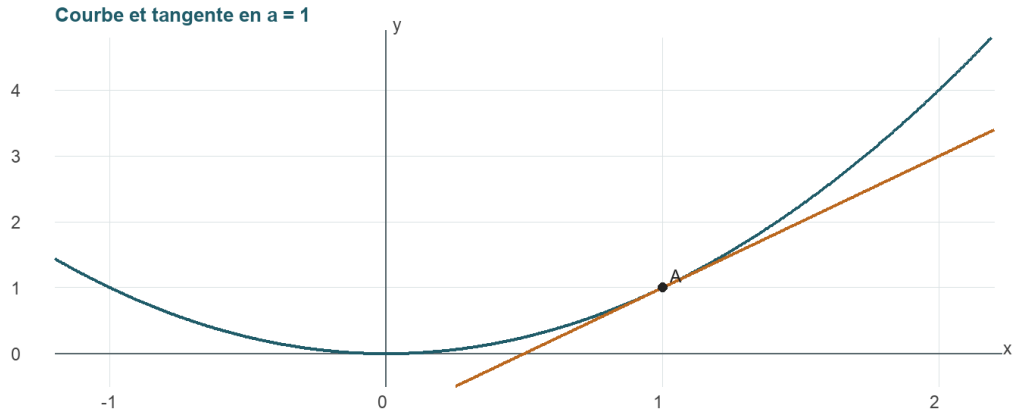
La dérivabilité assure plus précisément que l'erreur, divisée par h, tend vers zéro quand h tend vers zéro. Une petite valeur de $|h|$ seule ne fournit pas une borne chiffrée de l'erreur ; dans l'exemple précédent, le calcul exact donnait h^2.

Exemple corrigé Tangente à la parabole

$$g(x) = x^2, \quad a = 1, \quad g(1) = 1, \quad g'(1) = 2$$

$$y = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$$

On commence par calculer la valeur au point et la pente, puis on remplace dans la formule. La pente 2 n'est pas l'ordonnée à l'origine, qui vaut ici −1.



Bleu pétrole : y = x². Orange : y = 2x − 1. La tangente passe par A(1 ; 1).

À retenir. Une tangente décrit un comportement local. Elle peut couper la courbe en d'autres points ou traverser la courbe au point de tangence : « toucher sans traverser » n'est pas une définition générale.

Exercice 6 Calculer deux tangentes

Parcours prioritaire.

On admet que $f(x) = 1 + x^2$ vérifie f'(x) = 2x. Déterminer les tangentes en $a = 0$ et $a = 1/2$. Vérifier que chacune passe par le point de la courbe correspondant.

.....

.....

.....

3 Fonction dérivée et dérivées usuelles

3 1 Du nombre à la fonction

Si f est dérivable en chaque point d'un intervalle ouvert I, sa fonction dérivée associe à chaque x son nombre dérivé. La fonction se note f' ou df/dx ; sa valeur au point a est le nombre $f'(a)$.

$$f(x) = 1 + x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x, \quad mais\ f'(3) = 6$$

3 2 Formules à utiliser sur leur domaine de dérivabilité

Fonction f(x)	Dérivée f'(x)	Conditions
c	0	c constante ; x réel
$mx + b$	m	m et b constants ; x réel
x^n	nx^{n-1}	n entier ≥ 1 ; x réel
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	α réel ; x > 0
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	x ≠ 0
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	x > 0
e^x	e^x	x réel
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	x > 0

Les constantes sont fixées pendant la dérivation. Pour $n = 1$, la dérivée de x est 1. Les formules plus générales sur les puissances s'appliquent ici à $x > 0$; les puissances entières négatives sont aussi dérivables pour $x < 0$.

3 3 Somme et multiplication par une constante

Si u et v sont dérivables sur le même intervalle et λ est une constante réelle :

$$(u + v)' = u' + v', \quad (\lambda u)' = \lambda u'$$

$$f(x) = 3x^4 - 2x + 7 \Rightarrow f'(x) = 3 \times 4x^3 - 2 \times 1 + 0$$

$$f'(x) = 12x^3 - 2$$

Exercice 7 Appliquer les formules usuelles

Parcours prioritaire.

Dériver $A(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 2$ sur $\mathbb{R}$, puis $B(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x} - 2\,ln(x)$ sur]0 ; +∞[.

.....

.....

.....

3 Dériver un produit et un quotient

3 4 La règle du produit

$$(uv)' = u'v + uv'$$

On dérive le premier facteur en gardant le second, puis on garde le premier en dérivant le second. On additionne les deux termes. La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Exemple corrigé

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

$$u(x) = x^2 + 1, \quad u'(x) = 2x, \quad v(x) = e^x, \quad v'(x) = e^x$$

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x = e^x(x^2 + 2x + 1)$$

La factorisation finale est possible car les deux termes contiennent e^x. Elle sera utile pour étudier le signe.

3 5 Inverse et quotient

Si u et v sont dérivables et si les dénominateurs sont non nuls :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Dans le quotient, l'ordre du numérateur compte : dérivée du haut × bas, moins haut × dérivée du bas. Le dénominateur est le carré du bas.

Exemple corrigé

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \quad pour\ x \neq 1$$

$$g'(x) = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1) \times 1}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$$

On garde la condition x ≠ 1 après simplification. La formule s'utilise sur chacun des intervalles]−∞ ; 1[et]1 ; +∞[.

Exercice 8 Choisir la règle puis calculer

Parcours prioritaire.

Dériver $F(x) = (2x + 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$ et $G(x) = \frac{x+1}{x-2}$ pour x ≠ 2. Identifier u, v, u' et v' avant le calcul.

.....

.....

.....

.....

3 Utiliser une dérivée

3 6 Relier le signe aux variations

Pour une fonction dérivable sur un intervalle I : si $f' \geq 0$ sur I, f est croissante ; si $f' \leq 0$, f est décroissante. Si $f' > 0$ partout, elle est strictement croissante ; si $f' < 0$ partout, strictement décroissante. Si $f' = 0$ partout, elle est constante.

Une dérivée nulle en un seul point n'implique pas que la fonction est constante. Un changement de signe de f' de − vers + indique un minimum local ; de + vers −, un maximum local, au point considéré.

Exemple corrigé

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

Le facteur 2 est positif. La dérivée est négative pour $x < 2$, nulle en 2 et positive pour $x > 2$. La fonction décroît jusqu'à 2 puis croît ; son minimum vaut $f(2) = 1$.

Exercice 9 Comparer deux démarches

À reprendre chez soi ou pour aller plus loin.

Pour $H(x) = (x - 1)(x^2 + 2)$, calculer H' avec la règle du produit, puis en développant H avant de dériver. Vérifier que les expressions obtenues sont égales.

.....

.....

.....

.....

Exercice 10 Dérivée tangente et variations

Parcours prioritaire.

Soit $p(x) = x^2 - 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer $p'(x)$ et $p'(0)$.

b. Déterminer la tangente en $a = 0$.

c. Étudier le signe de p' et donner les variations et le minimum de p.

d. La pente de la tangente en $a = 1$ est-elle nulle ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Méthode pour une tangente

Calculer f(a), calculer f'(a), écrire $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, puis simplifier si cela aide. Vérifier le passage par $A(a\,;\, f(a))$. Les lettres x et a ont des rôles différents : x varie le long de la droite, a désigne le point fixé.

4 Dériver une fonction composée

4 1 Repérer les opérations successives

Une composition consiste à appliquer une fonction, puis une autre au résultat. Si u envoie I dans J et F est définie sur J :

$$(F \circ u)(x) = F(u(x))$$

u est la fonction intérieure, calculée en premier ; F est la fonction extérieure. L'ordre compte : en général F ∘ u et u ∘ F sont différentes.

Exemple Décomposer avant de dériver

$$f(x) = e^{x^2+1}$$

$$x \mapsto u(x) = x^2 + 1 \mapsto F(u(x)) = e^{x^2+1}$$

On calcule d'abord $x^2 + 1$, puis son exponentielle. Il ne s'agit pas d'un produit entre e^x et $x^2 + 1$.

4 2 La règle de la chaîne

Si u est dérivable en x et F est dérivable en u(x), alors :

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x)) \times u'(x)$$

À retenir. On dérive la fonction extérieure en conservant l'intérieur, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur.

$$u'(x) = 2x, \quad F'(z) = e^z$$

$$f'(x) = e^{x^2+1} \times 2x$$

Le facteur 2x est indispensable. La lettre z sert seulement à écrire la règle de F sans la confondre avec la variable intérieure.

Exemple corrigé Décroissance exponentielle

$$C(t) = 10e^{-0{,}3t} \Rightarrow C'(t) = 10 \times (-0{,}3)e^{-0{,}3t} = -3e^{-0{,}3t}$$

La constante 10 reste multiplicative. L'exposant intérieur −0,3t a pour dérivée −0,3 ; le signe négatif indique ici une décroissance.

Exercice 11 Identifier puis dériver

Parcours prioritaire.

Pour $f(x) = (3x - 2)^4$ et $g(x) = e^{5x+1}$, identifier l'intérieur u et l'extérieur F. Calculer u' et F', puis la dérivée composée.

.....

.....

.....

.....

4 Les formes composées usuelles

Dans les formules suivantes, u est dérivable. Les conditions portent sur les valeurs de u, et doivent être vérifiées sur l'intervalle étudié.

Expression	Dérivée	Condition
u^n	$nu'u^{n-1}$	n entier ≥ 1
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1}$	u > 0 ; α réel
e^u	$u'e^u$	Aucune condition de signe sur u
$ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	u > 0
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	u > 0
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	u ≠ 0

Exemple corrigé Un logarithme composé

$$f(x) = ln(x^2 + 1)$$

L'intérieur $x^2 + 1$ est strictement positif pour tout réel x : le logarithme est défini et dérivable partout. On pose $u(x) = x^2 + 1$; sa dérivée vaut 2x.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Exemple corrigé Une racine composée

$$g(x) = \sqrt{3x - 2}$$

La fonction est définie pour $x \geq 2/3$. La formule de dérivation s'applique pour $3x - 2 > 0$, donc $x > 2/3$. La dérivée de l'intérieur est 3 :

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}} \quad pour\ x > \frac{2}{3}$$

Exercice 12 Contrôler le domaine et le facteur intérieur

Parcours prioritaire.

Déterminer le domaine de définition, les intervalles de dérivabilité puis la dérivée de $A(x) = ln(2x + 3)$, $B(x) = \sqrt{1 + x^2}$ et $C(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

4 Paramètres et combinaison de règles

4 3 Fixer la variable de dérivation

Dans une formule scientifique, plusieurs lettres apparaissent. Seule la variable indiquée varie ; les paramètres restent constants pendant la dérivation.

Exemple corrigé

$$F(x) = \left(\frac{x}{c}\right)^4 - 1 \quad avec\ c > 0\ fixé$$

$$u(x) = \frac{x}{c}, \quad u'(x) = \frac{1}{c}$$

$$F'(x) = 4\left(\frac{x}{c}\right)^3 \times \frac{1}{c} = \frac{4x^3}{c^4}$$

On peut vérifier en écrivant F(x) = $x^4/c^4 - 1$: le coefficient $1/c^4$ est constant.

Exercice 13 Une même formule deux variables

Parcours prioritaire.

a. Avec d > 0 fixé, dériver $F(D) = \left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1$ par rapport à D.

b. Avec D > 0 fixé, dériver $G(d) = \left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1$ par rapport à d, pour d > 0. Écrire d'abord G sous forme d'une puissance de d.

c. Expliquer pourquoi les deux dérivées n'ont pas le même signe pour D > 0 et d > 0.

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 14 Associer produit logarithme et puissance

À reprendre chez soi ou pour aller plus loin.

Pour ξ > 0, on pose $H(\xi) = \frac{a\ ln(\xi) + b}{\sqrt{\xi}}$, où a et b sont des constantes réelles.

(ξ se prononce « XI »)

a. Réécrire H comme un produit avec une puissance de ξ.

b. Dériver chacun des deux facteurs.

c. Calculer H' et réunir le résultat sur un seul dénominateur.

d. Vérifier le résultat dans le cas a = 0 et b = 1.

.....

.....

.....

.....

.....

Aide : une écriture avec l'exposant −1/2 évite d'imbriquer plusieurs fractions pendant le calcul. Le résultat peut s'écrire avec un dénominateur $2\xi^{\frac{3}{2}}$.

5 Comprendre une fonction réciproque

5 1 Retrouver une entrée à partir de sa sortie

Une fonction $f : I \to J$ est bijective lorsque chaque y de J possède un unique antécédent x dans I. Sa fonction réciproque, notée $f^{-1} : J \to I$, associe à y cet antécédent.

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

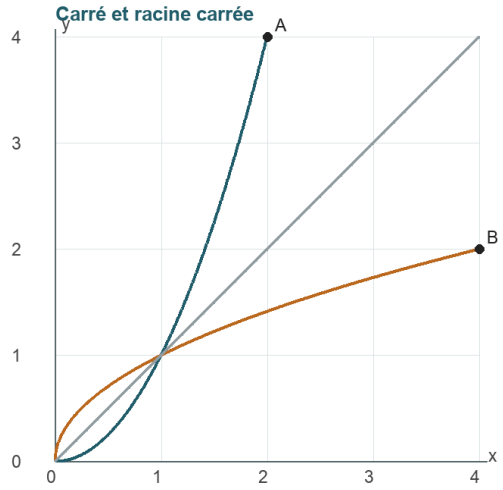
Une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est bijective de I vers son image J = f(I). Il faut préciser les intervalles avant de parler de réciproque.

À retenir. f^{-1} désigne une fonction réciproque ; 1/f désigne l'inverse multiplicatif. Ces deux opérations sont différentes.

Exemple corrigé Le carré sur un intervalle adapté

Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas bijective : 2 et −2 donnent tous deux 4. Sur $[0 ; +\infty[$, elle est continue et strictement croissante, et son image est $[0 ; +\infty[$. Sa réciproque est la racine carrée.

$$y = x^2 \; avec \; x \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$



Bleu pétrole : le carré restreint à x ≥ 0. Orange : la racine carrée. Les points A(2 ; 4) et B(4 ; 2) sont symétriques par rapport à y = x, en gris.

Exercice 15 Trouver une réciproque affine

Parcours prioritaire.

Soit $f(x) = 3x - 2$ sur $\mathbb{R}$. Justifier sa bijectivité de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, puis exprimer $f^{-1}(y)$. Calculer $f^{-1}(4)$ et $\frac{1}{f(4)}$. Comparer les résultats.

.....

.....

.....

5 Dériver une fonction réciproque

5 2 La formule et ses conditions

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert I, et J = f(I). Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Autrement dit, avec y ∈ J et au point où le dénominateur est non nul :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Le théorème assure l'existence de cette dérivée. La formule s'explique par l'identité $f(f^{-1}(y)) = y$: en dérivant la composition, on obtient le produit suivant, puis on divise par le facteur non nul.

$$f'(f^{-1}(y)) \times (f^{-1})'(y) = 1$$

Exemple corrigé Retrouver la dérivée du logarithme

L'exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ vers]0 ; +∞[; sa dérivée e^x ne s'annule jamais. Sa réciproque est ln. Pour $y > 0$:

$$(ln)'(y) = \frac{1}{e^{ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

Exemple corrigé Retrouver la dérivée de la racine

Sur]0 ; +∞[, $f(x) = x^2$ a pour dérivée $2x > 0$. Sa réciproque est $\sqrt{y}$:

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad pour\ y > 0$$

Au point 0, cette formule ne s'applique pas. Le quotient $\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$ quand $h \to 0^+$: il n'y a pas de dérivée réelle finie, même du côté droit.

Exercice 16 Utiliser le point correspondant

Parcours prioritaire.

Une fonction f satisfait les hypothèses du théorème, avec $f(2) = 5$ et $f'(2) = 4$. Calculer $f^{-1}(5)$, puis $(f^{-1})'(5)$. Expliquer pourquoi on utilise $f'(2)$, et non $f'(5)$.

.....

.....

.....

Exercice 17 Comprendre pourquoi une hypothèse compte

À reprendre chez soi ou pour aller plus loin.

La fonction $f(x) = x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Calculer $f'(0)$. La formule précédente s'applique-t-elle en $y = 0$? Pour $h > 0$, étudier le taux d'accroissement de la racine cubique en zéro et conclure sur l'existence d'une dérivée réelle finie.

.....

.....

6 Exercices de synthèse

Ces deux exercices réunissent les méthodes du cours. Écrire le domaine et identifier la règle avant chaque dérivation. Les réponses peuvent être poursuivies sur une feuille.

Exercice 18 Tangente et estimation numérique

Parcours prioritaire.

On considère $f(x) = ln(1 + 2x)$.

a. Déterminer le domaine de définition et calculer $f'(x)$.

.....

.....

b. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$, puis écrire la tangente en $a = 0$.

.....

.....

c. Utiliser l'approximation affine pour estimer $ln(1{,}02)$. Préciser la valeur de x utilisée.

.....

.....

d. Comparer avec la calculatrice, puis calculer l'erreur absolue. La formule de la tangente donne-t-elle une valeur exacte ?

.....

.....

Exercice 19 Décroissance et sensibilité locale

Parcours prioritaire.

La concentration d'une substance est modélisée, pour $t \geq 0$, par la loi suivante. t est le temps en heures et $C(t)$ la concentration en mg/L ; le coefficient 0,2 a pour unité h^{-1}, de sorte que l'exposant est sans dimension.

$$C(t) = 80e^{-0{,}2t}$$

a. Calculer $C'(t)$, préciser son unité et justifier la décroissance de C.

.....

.....

b. Calculer $C(5)$ et $C'(5)$, en conservant les valeurs exactes.

.....

.....

c. Écrire l'approximation affine de $C(5 + h)$ pour h proche de 0. En déduire une estimation de $C(5{,}1)$, puis comparer à la valeur calculée directement.

.....

.....

.....

d. À $t = 5\ h$, expliquer avec une phrase le sens de la valeur de $C'(5)$.

.....

.....

7 Pour poursuivre le travail chez soi

7.1 Continuité et dérivabilité

Exercice 20 Une fonction continue mais non dérivable

À reprendre chez soi ou pour aller plus loin.

La fonction valeur absolue est définie par $|x| = x$ pour $x \geq 0$ et $|x| = -x$ pour $x < 0$.

a. Donner sa dérivée pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

.....

.....

b. En zéro, écrire le taux d'accroissement $\frac{|h| - |0|}{h}$ pour $h \neq 0$. Le simplifier pour $h > 0$, puis pour $h < 0$.

.....

.....

.....

c. Comparer les limites à droite et à gauche. Pourquoi la fonction n'est-elle pas dérivable en zéro ? Dessiner les deux demi-droites et interpréter le résultat.

.....

.....

.....

À retenir. Une fonction dérivable en un point est continue en ce point. La réciproque de cette implication est fausse : une courbe continue peut présenter un angle, comme celle de la valeur absolue en zéro.

7.2 Deux logarithmes et une autre exponentielle

Le logarithme décimal et l'exponentielle de base a > 0 s'écrivent à l'aide de ln et exp :

$$log_{10}(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)} \quad pour\ x > 0, \quad a^x = e^{x\,ln(a)}$$

Dériver ces deux expressions, puis appliquer la seconde formule à a = 2. Attention : ln(10) et ln(a) sont des constantes pendant la dérivation.

.....

.....

.....

7.3 Synthèse sur une fonction réciproque

Exercice 21 Dériver la réciproque sans en chercher la formule

À reprendre chez soi ou pour aller plus loin.

On considère la fonction $f(x) = x^3 + x$ définie sur $\mathbb{R}$. Le but est de calculer une dérivée de sa réciproque sans exprimer explicitement cette réciproque.

a. Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Votre argument doit établir à la fois l'unicité de l'antécédent et l'existence d'un antécédent pour chaque réel.

.....

.....

.....

.....

.....

b. Déterminer l'antécédent de 2 par f. Justifier que l'on a bien trouvé l'unique antécédent.

.....

.....

.....

c. Calculer $(f^{-1})'(2)$. Indiquer le point où l'on évalue f' et vérifier l'hypothèse qui permet d'appliquer la formule.

.....

.....

.....

.....

d. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 2. Vérifier le passage par le point correspondant.

.....

.....

.....

Indication si nécessaire pour a : étudier la continuité, le signe de la dérivée et les limites en $-\infty$ et $+\infty$. Une fonction strictement croissante possède au plus un antécédent par valeur ; la continuité et les limites permettent ici de montrer que toutes les valeurs réelles sont atteintes.

Bilan des méthodes

Pour une tangente, calculer la valeur et la pente au même point.

Pour une composée, conserver l'intérieur dans la dérivée extérieure et multiplier par la dérivée intérieure.
Pour une réciproque, retrouver le point antécédent et vérifier que la dérivée de départ ne s'y annule pas.

Reprendre en priorité les exercices non terminés en séance, puis les exercices 3, 9, 14, 17 et 20. Refaire sans le modèle un exemple de chaque règle qui pose encore difficulté.