Intégration et calcul de surface

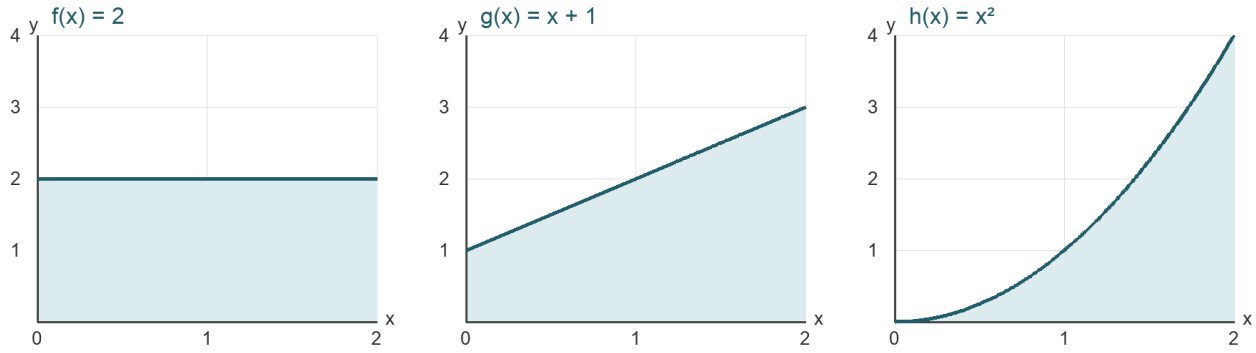
Partie 1 De l'aire à l'intégrale

Licence 3 • Durée indicative : 30 minutes

Comprendre le sens d'une intégrale, distinguer aire géométrique et aire algébrique, puis utiliser les propriétés pour calculer à partir d'intégrales connues.

1 Activité 1 Des aires connues et une inconnue

On considère $f(x) = 2$, $g(x) = x + 1$ et $h(x) = x^2$ sur [0 ; 2]. Pour chaque fonction, on étudie le domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$. Le repère est orthonormé.



1. Identifier la figure et calculer l'aire sous la courbe de f.

.....

2. Identifier la figure et calculer l'aire sous la courbe de g.

.....

3. Pourquoi les formules usuelles ne permettent-elles pas de calculer directement l'aire sous la courbe de h ?

.....

2 La notion d'intégrale

Définition. Soit f une fonction continue sur [a ; b], avec a < b, telle que f(x) ≥ 0 sur cet intervalle. L'intégrale de f entre a et b est l'aire du domaine compris entre sa courbe, l'axe des abscisses et les droites x = a et x = b.

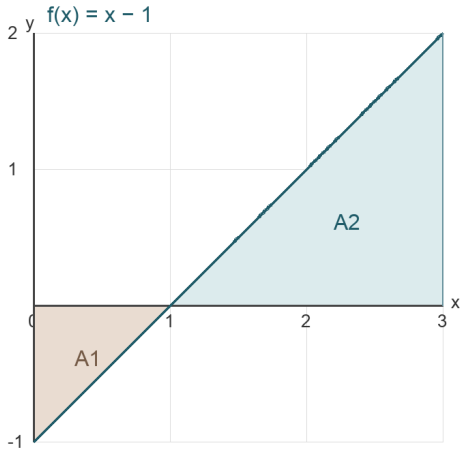
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

a et b sont les bornes d'intégration ; f est la fonction intégrée ; x est la variable d'intégration. L'écriture dx précise cette variable, qui est muette : on pourrait la remplacer par t.

Les aires sont exprimées en unités d'aire. L'intégrale prolonge ainsi les calculs d'aire du rectangle et du trapèze aux domaines délimités par des courbes.

3 Activité 2 Aire géométrique et aire algébrique

On considère ici $f(x) = x - 1$ sur [0 ; 3]. Le graphique est fourni dans un repère orthonormé. A_1 et A_2 désignent les aires géométriques des deux régions représentées.



1. Calculer l'aire A_1 de la région située sous l'axe des abscisses.

.....

.....

2. Calculer l'aire A_2 de la région située au-dessus de l'axe des abscisses.

.....

.....

3. En déduire l'aire géométrique totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses sur [0 ; 3].

.....

.....

4. On compte négativement la région située sous l'axe et positivement celle située au-dessus. Calculer l'intégrale suivante.

$$\int_0^3 (x - 1)\, dx$$

.....

5. Expliquer la différence entre l'aire géométrique totale et la valeur de l'intégrale.

.....

.....

Interprétation à retenir

Pour a < b, l'intégrale d'une fonction continue est une aire algébrique : les régions au-dessus de l'axe comptent positivement, celles en dessous négativement. Une intégrale peut donc être positive, négative ou nulle.

L'aire géométrique totale est toujours positive ou nulle. Elle s'obtient en additionnant les aires de toutes les régions, sans tenir compte du signe de f :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\, dx \quad (a < b).$$

4 Les propriétés de l'intégrale

Dans les propriétés suivantes, f et g sont continues sur un intervalle I contenant les bornes utilisées ; λ et μ sont des réels.

Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

On décompose le calcul sur des intervalles successifs. La relation reste valable quel que soit l'ordre de a, b et c.

Linéarité

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

Inversion des bornes

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Positivité et comparaison

Si $a \leq b$ et $f(x) \geq 0$ pour tout x de [a ; b], alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Si $a \leq b$ et $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de [a ; b], alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

5 Exercice Utiliser les propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur [0 ; 4] telles que :

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 3, \quad \int_0^4 g(x)\,dx = -2, \quad \int_0^2 f(x)\,dx = 1.$$

Sans rechercher de primitives, calculer les intégrales suivantes. Indiquer la propriété utilisée et une étape de calcul.

1. $\int_0^4 2f(x)\,dx =$ .....

.....

.....

.....

2. $\int_0^4 (f(x) + g(x))\,dx =$ .....

.....

.....

.....

3. $\int_0^4 (3f(x) - 2g(x))\,dx =$ .....

.....

.....

.....

4. $\int_2^4 f(x)\,dx =$ .....

.....

.....

.....

5. $\int_4^0 f(x)\,dx =$ .....

.....

.....

.....

Partie 2 Calculer une intégrale

Licence 3 • Durée indicative : 45 minutes

Les propriétés permettent de transformer une intégrale. Pour en calculer la valeur exacte, nous allons établir le lien entre intégration et dérivation, puis utiliser les primitives usuelles.

1 Les primitives

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.

Par exemple, $F(x) = x^2$ est une primitive de $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$, puisque $F'(x) = 2x$. La fonction $x^2 + 5$ est également une primitive de $2x$.

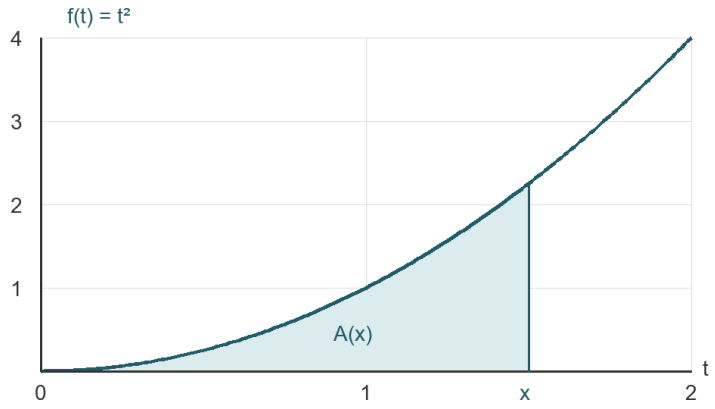
Propriété. Si F est une primitive de f sur un intervalle I, toutes les primitives de f sur I sont les fonctions $F + C$, où C est une constante réelle.

Deux primitives d'une même fonction diffèrent donc d'une constante sur un intervalle.

2 Activité Une aire qui dépend de la borne

Pour $x \in [0\,;\,2]$, on considère la fonction aire :

$$A(x) = \int_0^x t^2\,dt$$



Le graphique illustre une valeur de x comprise entre 0 et 2 ; x peut varier. La lettre t est la variable d'intégration et x est la borne supérieure.

1. Que représente $A(x)$? Que vaut $A(0)$?

.....

2. Lorsque x augmente, comment évolue $A(x)$? Justifier avec le graphique.

.....

3. Pour $0 \leq x < x + \delta \leq 2$, que représente $A(x + \delta) - A(x)$?

.....

.....

3 Le théorème fondamental de l’analyse

Dans l’activité, Chasles permet d’écrire :

$$A(x + \delta) - A(x) = \int_x^{x+\delta} t^2\,dt$$

Sur [x ; x + δ], la fonction t ↦ t² est comprise entre x² et (x + δ)². La comparaison et l’intégrale d’une constante donnent, pour δ > 0 :

$$x^2 \leq (A(x + \delta) - A(x)) / \delta \leq (x + \delta)^2.$$

Lorsque δ tend vers 0, les deux bornes tendent vers x². Ce raisonnement suggère que le taux de variation de A tend vers x². Le théorème suivant généralise ce lien et garantit la dérivabilité à l’intérieur de l’intervalle.

Théorème Une intégrale à borne variable

Soit f continue sur [a ; b], avec a < b. La fonction A définie sur [a ; b] par

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est continue sur $[a\,;\,b]$, dérivable sur $]a\,;\,b[$ et vérifie $A'(x) = f(x)$ sur $]a\,;\,b[$. Elle vérifie aussi $A(a) = 0$.

Conséquence Calcul à l’aide d’une primitive

Si F est une primitive de f sur $[a\,;\,b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

En effet, F et A ont la même dérivée ; $F - A$ est constante. Comme $A(a) = 0$, on obtient $A(x) = F(x) - F(a)$, puis la formule en x = b.

La constante ajoutée à une primitive disparaît dans $F(b) - F(a)$. Une seule primitive suffit donc au calcul.

Exemple corrigé

Calculer l’intégrale de x² entre 1 et 3. Une primitive de x² est $F(x) = \frac{x^3}{3}$, car $F'(x) = x^2$.

$$\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

Méthode. Identifier une primitive, la vérifier par dérivation si nécessaire, puis calculer sa valeur à la borne supérieure moins sa valeur à la borne inférieure.

Retour à la partie 1

Calculer maintenant l’aire sous la courbe de $h(x) = x^2$ sur [0 ; 2]. Indiquer la primitive utilisée et l’évaluation aux bornes.

.....

.....

.....

4 Les primitives usuelles

Le tableau donne une primitive pour chaque fonction. On retrouve ces formules en dérivant la colonne de droite. Les intervalles indiqués garantissent que les fonctions sont définies.

Fonction f(x)	Une primitive F(x)	Intervalle ou condition
k	kx	$\mathbb{R}$; k réel
x^n	$x^{n+1} / (n + 1)$	n entier ≥ 0 : $\mathbb{R}$; n entier ≤ −2 : intervalle ne contenant pas 0
$1/x$	$ln \lvert x \rvert$	Intervalle inclus dans $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$cos\ x$	$sin\ x$	$\mathbb{R}$
$sin\ x$	$-cos\ x$	$\mathbb{R}$
$1/(1 + x^2)$	$arctan\ x$	$\mathbb{R}$

Dans la ligne des puissances, n ≠ −1. Le cas n = −1 correspond à la fonction 1/x et se traite avec le logarithme.

Primitives et combinaisons linéaires

Si $F' = f$ et $G' = g$ sur un même intervalle, alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$. Cela découle de la linéarité de la dérivation.

Exemple. Une primitive de $3x^2 - 4x + 5$ est $x^3 - 2x^2 + 5x$: sa dérivée redonne bien la fonction de départ.

Exercice Vérifier une primitive

1. Vérifier que $F(x) = 2\ ln\ x + e^x$ est une primitive de $f(x) = \frac{2}{x} + e^x$ sur $]0 ; +\infty[$.

.....

.....

.....

2. Trouver la primitive de $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(1) = 0$.

.....

.....

.....

Point de méthode. Pour vérifier une primitive, on la dérive. Pour calculer une intégrale, on évalue une primitive aux bornes.

5 Exercices Calculer avec une primitive

Pour chaque intégrale, préciser une primitive F, écrire F(b) − F(a), puis donner la valeur exacte. Les trois premières questions sont prioritaires ; les deux dernières permettent de poursuivre l'entraînement.

Question 1

$$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 5)\,dx$$

.....

.....

.....

Question 2

$$\int_{-1}^2 (4x^3 - 6x + 1)\,dx$$

.....

.....

.....

Question 3

$$\int_1^e \left(\frac{2}{x} + e^x\right)\,dx$$

.....

.....

.....

Question 4

$$\int_0^\pi (2\cos x - \sin x)\,dx$$

.....

.....

.....

Question 5

$$\int_1^3 \left(5x^4 - \frac{3}{x^2} + 2\right)\,dx$$

.....

.....

.....

Partie 3 Techniques d'intégration

Licence 3 • Durée indicative : 75 minutes

Trois méthodes complètent les primitives usuelles : le changement de variable pour une fonction composée, l'intégration par parties pour certains produits et la décomposition en éléments simples pour des fractions rationnelles.

3.1 Le changement de variable

Reconnaître une fonction composée

On considère $f(x) = 2x(x^2 + 1)^2$. Le facteur $2x$ est la dérivée de $x^2 + 1$. Cette présence de la dérivée de la fonction intérieure permet de retrouver une primitive.

Activité. Dériver $F(x) = \frac{(x^2+1)^3}{3}$. Que peut-on en déduire pour f ?

.....

.....

Principe. Si $G' = g$ et si φ est dérivable, alors :

$$(G \circ \varphi)'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Ainsi $G(\varphi(x))$ est une primitive de $g(\varphi(x))\varphi'(x)$. On peut traduire cette règle en posant $u = \varphi(x)$, avec $du = \varphi'(x)\,dx$.

La formule pour une intégrale définie

Si ϕ est de classe C¹ sur [a ; b] et g est continue sur un intervalle contenant ϕ([a ; b]), alors :

$$\int_a^b g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(u)\,du$$

Les bornes changent avec la variable : $x = a$ devient $u = \varphi(a)$, et $x = b$ devient $u = \varphi(b)$. Leur ordre se conserve tel qu'il résulte du calcul, même si $\varphi(b) < \varphi(a)$.

Exemple corrigé

$$\int_0^1 2x(x^2 + 1)^2\,dx$$

On pose $u = x^2 + 1$; alors $du = 2x\,dx$. Les bornes deviennent $u(0) = 1$ et $u(1) = 2$.

$$\int_0^1 2x(x^2 + 1)^2\,dx = \int_1^2 u^2\,du = [u^3/3]_1^2 = (8 - 1)/3 = 7/3.$$

Pour une primitive, on revient à la variable initiale : $F(x) = \frac{(x^2+1)^3}{3}$. Pour une intégrale définie, le changement de bornes permet d'effectuer tout le calcul dans la nouvelle variable.

Point de méthode. Toute l'expression doit être réécrite dans la nouvelle variable : intégrande, différentielle et bornes. On ne mélange pas une expression en u avec les anciennes bornes en x.

3.1 Exercices de changement de variable

Pour chaque intégrale, indiquer le changement de variable, la différentielle et les nouvelles bornes, puis calculer la valeur exacte.

Exercice 1 Une exponentielle composée

$$\int_0^1 3x^2\, e^{x^3}\, dx$$

Poser $u = x^3$.

Exercice 2 Un quotient

$$\int_0^1 2x/(1 + x^2)\, dx$$

Poser $u = 1 + x^2$.

Exercice 3 Des bornes dans un autre ordre

$$\int_0^1 e^{1-x}\, dx$$

Poser $u = 1 - x$. Expliquer le rôle du signe de du et vérifier le signe du résultat.

Pour poursuivre Une primitive

Déterminer toutes les primitives de $f(x) = 2x\, cos(x^2)$ sur $\mathbb{R}$. Vérifier le résultat par dérivation.

3.2 L'intégration par parties

Cette méthode découle de la dérivée d'un produit. Elle permet notamment d'intégrer un polynôme multiplié par une exponentielle ou une fonction trigonométrique.

Activité Partir de la dérivation d'un produit

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur [a ; b] : elles sont dérivables et leurs dérivées sont continues.

1. Rappeler la formule de $(uv)'$, puis isoler le terme uv'.

.....

.....

2. Intégrer cette égalité entre a et b. À l'aide du théorème fondamental, exprimer l'intégrale de $(uv)'$.

.....

.....

La formule d'intégration par parties

Pour u et v de classe C^1 sur [a ; b] :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

On dérive u et on cherche une primitive v de v'. Le choix doit rendre le nouveau produit $u'v$ plus facile à intégrer. Le terme aux bornes vaut u(b)v(b) − u(a)v(a).

Pour rechercher une primitive, la même identité donne :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Cette écriture décrit une égalité de primitives à une constante près. On ajoute une constante C à l'expression finale si l'on demande toutes les primitives.

Exemple corrigé Le produit x e^x

On cherche une primitive de $x\,e^x$ sur $\mathbb{R}$. On choisit $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$; alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C.$$

Une primitive est donc $F(x) = (x - 1)e^x$. Vérification :

$$F'(x) = e^x + (x - 1)e^x = x\,e^x.$$

Attention. Une primitive d'un produit n'est pas, en général, le produit de primitives. Par exemple, la dérivée de $\frac{x^2}{2}e^x$ n'est pas $x\,e^x$.

3.2 Choisir les fonctions

Le choix de u et de v' est une étape du calcul. On cherche à la fois une dérivée u' plus simple et une primitive v facile à obtenir.

En pratique, on choisit souvent pour u un logarithme ou une fonction trigonométrique inverse ; à défaut, un polynôme associé à une exponentielle ou à une fonction trigonométrique. Cet ordre est un guide : il faut vérifier que l'intégrale obtenue se simplifie.

Exemple. Pour $x\ ln\ x$ sur]0 ; +∞[, choisir $u\ =\ ln\ x$ et $v'\ =\ x$ donne $u'\ =\ \frac{1}{x}$ et v = $\frac{x^2}{2}$. Le produit $u'v$ devient x/2, dont une primitive est immédiate.

Exercice Préparer le calcul

Compléter le tableau avec un choix pertinent. Aucun calcul d'intégrale n'est demandé. Pour chaque ligne, observer le nouveau produit $u'v$.

Produit à intégrer	$u(x)$	$v'(x)$	$u'(x)$	$v(x)$
$x\ e^x$				
$x\ cos\ x$				
$x\ ln\ x\ \ (x\ >\ 0)$				
$x^2\ e^x$				
$x\ arctan\ x$				

Répéter une intégration par parties

Lorsque u est un polynôme, sa dérivée a un degré inférieur. Il peut être utile de répéter l'intégration par parties jusqu'à obtenir une primitive usuelle.

On cherche une primitive de $x^2\ e^x$ sur $\mathbb{R}$. En choisissant u = x² et v′ = eˣ, on obtient :

$$\int x^2\ e^x\ dx\ =\ x^2\ e^x\ -\ 2\int x\ e^x\ dx$$

1. Utiliser l'exemple corrigé de la page précédente pour terminer le calcul. Donner une primitive sous la forme $F(x)\ =\ P(x)e^x$, où P est un polynôme.

.....

.....

.....

2. Vérifier la primitive obtenue par dérivation.

.....

.....

3. Combien d'intégrations par parties sont nécessaires au total, en comptant celle de l'exemple précédent ?

.....

3.2 Exercices d'intégration par parties

Préciser u, v', u' et v, puis écrire la formule avant de calculer. Pour une primitive, indiquer l'intervalle considéré ; pour une intégrale définie, donner une valeur exacte.

Exercice 1 Un logarithme

Déterminer toutes les primitives de $x\ ln\ x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. Vérifier le résultat par dérivation.

Exercice 2 Une intégrale définie

$$\int_0^{\pi} x\ cos\ x\ dx$$

Calculer cette intégrale par parties. Préciser d'abord une primitive de x cos x, puis effectuer l'évaluation aux bornes.

Exercice 3 Une fonction trigonométrique inverse

$$\int_1^2 x\ arctan\ x\ dx$$

Choisir $u = arctan\ x$ et $v' = x$. On rappelle que $(arctan\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Utiliser ensuite $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ pour terminer le calcul.

Pour poursuivre Un polynôme de degré supérieur

$$\int_0^1 x^3\ e^x\ dx$$

Décrire la stratégie et prévoir le nombre d'intégrations par parties nécessaires avant de calculer. Ce prolongement peut être terminé en autonomie.

3.3 La décomposition en éléments simples

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes. Une décomposition en éléments simples la transforme en une somme de fractions dont les primitives sont connues. On travaille toujours sur un intervalle où le dénominateur ne s'annule pas.

Le cas de deux facteurs distincts

Si a et b sont distincts et si P est un polynôme de degré inférieur à 2, on cherche des constantes A et B telles que, pour x ≠ a et x ≠ b :

$$\frac{P(x)}{(x\ -\ a)(x\ -\ b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

Après mise au même dénominateur, cette égalité revient à l'identité polynomiale :

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{A(x-a)}{(x-a)(x-b)} + \frac{B(x-b)}{x-b} = \frac{A(x-a)+B(x-b)}{(x-a)(x-b)}$$

$$P(x)\ =\ A(x\ -\ b)\ +\ B(x\ -\ a).$$

On détermine A et B par identification des coefficients ou en évaluant cette identité en x = a et x = b. Ces valeurs sont utilisées dans l'identité polynomiale, après suppression des dénominateurs.

Exemple corrigé

Décomposer puis intégrer $f(x)\ =\ \frac{2x+5}{(x-1)(x+2)}$, sur un intervalle ne contenant ni −2 ni 1.

$$f(x) = \frac{2x\ +\ 5}{(x\ -\ 1)(x\ +\ 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)}{(x\ -\ 1)(x\ +\ 2)} + \frac{B(x-1)}{(x\ -\ 1)(x\ +\ 2)}$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x\ -\ 1)(x\ +\ 2)} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x\ -\ 1)(x\ +\ 2)} = \frac{(A+B)x+2A-B}{(x\ -\ 1)(x\ +\ 2)}$$

Par identification:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-B=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 3A=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{3}+B=2 \\ A=\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2-\frac{7}{3}=-\frac{1}{3} \\ A=\frac{7}{3} \end{cases}$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{2x\ +\ 5}{(x\ -\ 1)(x\ +\ 2)} = \frac{7}{3}.\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}.\frac{1}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{7}{3}.ln\,|x\ -\ 1| - \frac{1}{3}.ln\,|x\ +\ 2|.$$

En effet, $(ln\,|x\ -\ a|)' = \frac{1}{x-a}$ lorsque $x \neq a$. Toutes les primitives sur un intervalle donné s'écrivent $F\ +\ C$.

Méthode

Factoriser le dénominateur ; choisir la forme de la décomposition ; déterminer les coefficients ; vérifier en recomposant la fraction ; intégrer chaque terme ; évaluer aux bornes si l'intégrale est définie.

Le cas traité suppose que le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. Sinon, on commence par une division polynomiale. Ce cas n'est pas développé ici.

Un facteur double

Pour un dénominateur $(x\ -\ a)^2$ et un numérateur de degré inférieur à 2, la forme à chercher est :

$$\frac{P(x)}{(x-a)^2} /= \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2}.$$

Il faut les deux termes. Le premier s'intègre avec un logarithme ; une primitive du second est $-\frac{B}{(x-a)}$.

3.3 Exercices de décomposition

Pour chaque question, indiquer l'intervalle de travail, déterminer les coefficients, puis intégrer. Vérifier la décomposition en réduisant au même dénominateur.

Exercice 1 Deux facteurs distincts

Déterminer toutes les primitives de $\frac{7x+4}{(x+1)(x+3)}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Exercice 2 Une intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+2)(x+4)}\,dx$$

Décomposer en $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4}$, puis calculer la valeur exacte.

Pour poursuivre Un facteur double

Décomposer $\frac{2x+1}{(x-1)^2}$ en $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$. En déduire toutes ses primitives sur $]1\,;\,+\infty[$.

Choisir une méthode

Avant de calculer, observer la structure de l'expression : une fonction composée avec sa dérivée invite au changement de variable ; un produit qui se simplifie en dérivant l'un des facteurs invite à l'intégration par parties ; une fraction rationnelle factorisable invite à la décomposition en éléments simples.

Un calcul peut combiner plusieurs méthodes. La vérification par dérivation reste un moyen simple de contrôler une primitive.

Partie 4 L'intégration numérique

Licence 3 • Durée indicative : 60 minutes

Lorsque l'on ne dispose pas d'une primitive facile à calculer, ou lorsque la fonction n'est connue que par des mesures, on peut approcher une intégrale par des sommes calculables. Nous comparerons les rectangles, les trapèzes et Simpson, puis nous étudierons leur précision.

4.1 Préparer le calcul

Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$, avec a $<$ b. On cherche une approximation de :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

On partage $[a\,;\,b]$ en n sous-intervalles de même longueur. Le pas et les points de subdivision sont :

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Il y a n sous-intervalles et $n + 1$ points. Les bornes sont $x_0 = a$ et $x_n = b$.

Exemple fil conducteur

Pour comparer les méthodes, nous utiliserons $f(x) = x^2$ sur $[0\,;\,2]$. La partie 2 donne la valeur exacte :

$$I = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$$

Cette valeur sert de référence pour mesurer l'erreur. Dans un problème réel, la valeur exacte n'est généralement pas connue.

Activité Construire la subdivision

On choisit $n = 4$. Calculer le pas et compléter les valeurs nécessaires aux méthodes numériques.

$$h = \frac{2-0}{4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

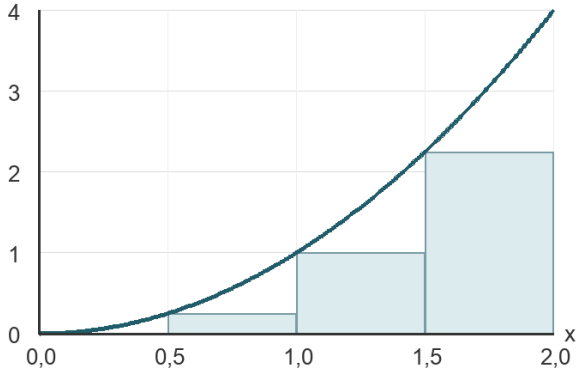
i	x_i	$f(x_i)$
0		
1		
2		
3		
4		

Les calculs seront effectués avec les valeurs exactes autant que possible ; on arrondira seulement le résultat final.

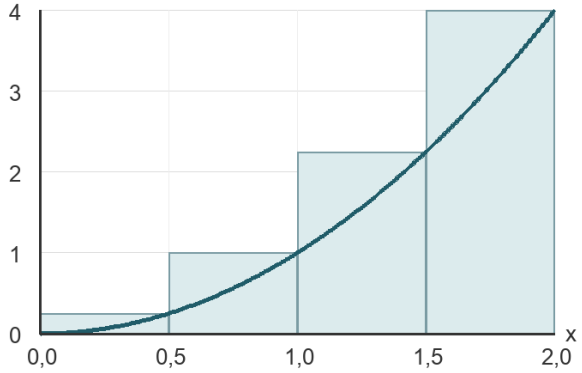
4.2 La méthode des rectangles

Sur chaque sous-intervalle, on remplace la fonction par une constante. La hauteur est prise à l'extrémité gauche ou à l'extrémité droite.

Rectangles à gauche



Rectangles à droite



Rectangles à gauche

$$R_{n,G} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Rectangles à droite

$$R_{n,D} = h \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

L'aire de chaque rectangle est le pas multiplié par la hauteur. Les formules restent valables pour des fonctions qui changent de signe : elles approchent alors l'intégrale algébrique.

Exemple corrigé Quatre rectangles à gauche

Avec $h = \frac{1}{2}$ et $f(x) = x^2$, les hauteurs sont $0, \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}$.

$$R_{4,G} = \frac{1}{2} \times \left(0 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4}\right) = \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

À vous de calculer

1. Calculer $R_{4,D}$ à l'aide du tableau de la page précédente.

.....

.....

.....

2. Comparer les deux approximations à $\frac{8}{3}$. Laquelle est inférieure à la valeur exacte ? Laquelle est supérieure ? Justifier avec la croissance de la fonction.

.....

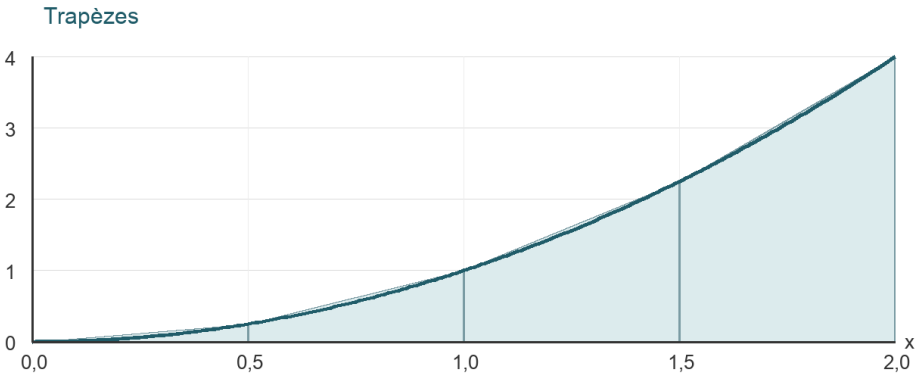
.....

.....

Pour une fonction croissante, les rectangles à gauche donnent une valeur par défaut et ceux à droite une valeur par excès. Pour une fonction décroissante, les rôles sont inversés. Pour une fonction quelconque, cet encadrement n'est pas garanti.

4.3 La méthode des trapèzes

Sur chaque sous-intervalle, on remplace la courbe par le segment joignant les deux points de la courbe. L'intégrale de cette fonction affine se calcule avec la formule du trapèze.



La contribution du sous-intervalle $[x_i\ ;\ x_{i+1}]$ est :

$$\frac{h}{2}[f(x_i)\ +\ f(x_{i+1})].$$

En additionnant toutes les contributions, les valeurs aux extrémités apparaissent une fois et les valeurs intérieures deux fois :

$$T_n\ =\ h[\frac{f(a)\ +\ f(b)}{2}\ +\ \sum_{i\ =\ 1}^{n\ -\ 1} f(x_i)].$$

Pour une même subdivision, la méthode des trapèzes est aussi la moyenne des deux méthodes de rectangles :

$$T_n\ =\ \frac{R_{n,G}\ +\ R_{n,D}}{2}$$

Exemple corrigé

$$T_4\ =\ \frac{1}{2}[\frac{0\ +\ 4}{2}\ +\ \frac{1}{4}\ +\ 1\ +\ \frac{9}{4}]\ =\ \frac{11}{4}\ =\ 2{,}75.$$

L'approximation est ici supérieure à $\frac{8}{3}$. La courbe de x^2 est convexe : les segments se trouvent au-dessus de la courbe. Ce sens de l'erreur dépend de la convexité de la fonction.

À vous de vérifier

Retrouver T_4 en prenant la moyenne des deux approximations par rectangles.

.....

.....

.....

La méthode des trapèzes est exacte pour une fonction affine. Elle fournit une approximation pour une courbe générale.

4.4 La méthode de Simpson

Sur deux sous-intervalles successifs, on remplace la fonction par le polynôme de degré au plus deux passant par les trois points de la courbe. Son intégrale donne la formule de Simpson.

Sur $[x_0\ ;\ x_2]$, les trois points sont espacés d'un même pas h. La formule locale est :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \ \approx\ \frac{h}{3}[f(x_0)\ +\ 4f(x_1)\ +\ f(x_2)].$$

La formule composée

Le nombre n de sous-intervalles doit être pair, avec $n\ \geq\ 2$. On applique la formule locale par paires de sous-intervalles :

$$S_n\ =\ \frac{h}{3}[f(a)\ +\ f(b)\ +\ 4\sum_{j\,=\,1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j\,-\,1})\ +\ 2\sum_{j\,=\,1}^{\frac{n}{2}\,-\,1} f(x_{2j})].$$

Les coefficients suivent le motif :

$$1, 4, 2, 4, 2, \ldots, 4, 1.$$

Pour $n\ =\ 2$, la seconde somme est vide et vaut zéro. Le pas reste $h\ =\ \frac{b\,-\,a}{n}$.

Exemple corrigé Quatre sous-intervalles

Pour $f(x)\ =\ x^2$ sur $[0\ ;\ 2]$, on a $n\ =\ 4$ et $h\ =\ \frac{1}{2}$.

$$S_4\ =\ \frac{1}{6}[0\ +\ 4\ \times\ \frac{1}{4}\ +\ 2\ \times\ 1\ +\ 4\ \times\ \frac{9}{4}\ +\ 4]$$

$$=\ \frac{1}{6}\ \times\ 16\ =\ \frac{8}{3}$$

On retrouve la valeur exacte : la courbe est déjà une parabole. Plus généralement, Simpson est exacte pour les polynômes de degré au plus trois. Pour une fonction générale, le résultat est une approximation.

À vous de calculer

Appliquer Simpson avec $n\ =\ 2$ au même exemple. Préciser le pas et les trois valeurs utilisées, puis comparer au résultat précédent.

.....

.....

.....

.....

Point de vigilance. Le facteur de la formule composée est un tiers du pas, et le coefficient des points d'indice impair est quatre. Un nombre impair de sous-intervalles ne convient pas à cette formule.

4.5 Précision et convergence

Si Q est une approximation de la valeur exacte I, on définit l'erreur absolue et, lorsque $I \neq 0$, l'erreur relative par :

$$E_{abs} = |Q - I|, \quad E_{rel} = \frac{|Q - I|}{|I|}$$

Pour l'erreur relative en pourcentage, on multiplie E_{rel} par 100. Si $\mathrm{I} = 0$, l'erreur relative n'est pas définie.

Comparer sur une même subdivision

Pour $f(x) = x^2$ sur $[0\,;\,2]$ avec $\mathrm{n} = 4$, compléter le tableau à l'aide des résultats précédents.

Méthode	**Approximation**	$\mathrm{E_{abs}}$	**Erreur relative en %**
Rectangles à gauche	$\frac{7}{4}$		
Rectangles à droite			
Trapèzes	$\frac{11}{4}$		
Simpson	$\frac{8}{3}$		

Quelle méthode est la plus précise sur cet exemple ? Ce résultat suffit-il à affirmer qu'elle sera exacte pour toute fonction ?

.....

.....

4.5 Précision quand le pas diminue

Pour une fonction continue sur un intervalle fixé, les approximations convergent vers I lorsque n tend vers l'infini. Pour Simpson, on considère des nombres pairs de sous-intervalles.

Si la fonction est suffisamment régulière, les bornes d'erreur usuelles dépendent du pas :

Méthode	Hypothèse suffisante	Borne sur l'erreur
Rectangles	$f \in C^1([a\,;\,b])$	$\frac{b-a}{2} h\, M_1$
Trapèzes	$f \in C^2([a\,;\,b])$	$\frac{b-a}{12} h^2\, M_2$
Simpson	$f \in C^4([a\,;\,b])$	$\frac{b-a}{180} h^4\, M_4$

Ici $M_k = max_{x \in [a\,;\,b]} |f^{(k)}(x)|$ est le maximum de la valeur absolue de la dérivée d'ordre k.

Doubler le nombre de sous-intervalles divise le pas par deux. Les bornes d'erreur sont alors divisées respectivement par deux, quatre et seize. L'erreur réelle ne suit pas nécessairement ces rapports exactement ; elle peut notamment être nulle.

Application Prévoir l'effet d'un pas plus petit

On passe de $n = 4$ à $n = 8$. Sans refaire tous les calculs, indiquer le nouveau pas et le facteur de réduction de chaque borne d'erreur.

.....

.....

4.6 Exercices et préparation du TP

Exercice 1 Approcher une exponentielle

On étudie $f(x) = e^x$ sur $[0\,;\,1]$ avec $n = 4$. Sa valeur exacte de référence est :

$$I = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1.$$

1. Calculer le pas et compléter les valeurs ci-dessous. Conserver au moins six décimales dans les calculs intermédiaires.

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	
1	$\frac{1}{4}$	
2	$\frac{1}{2}$	
3	$\frac{3}{4}$	
4	1	

2. Calculer les quatre approximations et leurs erreurs absolues. Donner les approximations à six décimales ; pour les petites erreurs, utiliser si nécessaire la notation scientifique.

Méthode	**Approximation**	**Erreur absolue**
Rectangles à gauche		
Rectangles à droite		
Trapèzes		
Simpson		

3. Comparer les méthodes. Simpson donne-t-elle encore exactement la valeur de l'intégrale ?

.....

.....

Au TP

Construire un tableau des points et des valeurs de la fonction, programmer chaque formule, puis augmenter le nombre de sous-intervalles. Comparer les résultats, les erreurs et l'effet des arrondis. Si la valeur exacte est inconnue, la stabilité entre deux subdivisions constitue un indice de précision ; elle ne suffit pas, seule, à garantir une erreur donnée.

Intégration et calcul de surface

Partie 5 TP sur tableur et extension Python

Licence 3 • Tableur : environ 60 minutes • Extension Python : 20 à 30 minutes

Ce TP complète les 3 h 30 de cours. Il permet de programmer les rectangles et les trapèzes, de comparer leurs erreurs et de retrouver les mêmes résultats avec un court programme Python. Un tableur suffit pour la première partie.

5.1 Estimer une distance à partir de mesures

Un véhicule se déplace en ligne droite. Sa vitesse, positive ou nulle, est mesurée toutes les deux secondes. Les valeurs du tableau sont des données d'exercice.

Temps en secondes	Vitesse en mètres par seconde
0	0
2	4
4	7
6	9
8	10
10	10

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse. Avec t en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde, on cherche :

$$d = \int_0^{10} v(t)\,dt$$

On ne connaît pas la vitesse entre deux mesures. Les méthodes numériques permettent d'estimer la distance à partir du tableau.

Premier intervalle Un exemple traité

Entre zéro et deux secondes, la durée est de deux secondes. La vitesse mesurée passe de zéro à quatre mètres par seconde. Multiplier une vitesse par une durée donne une distance.

$$Rectangle\ gauche : 2 \times 0 = 0\,m.$$

$$Rectangle\ droit : 2 \times 4 = 8\,m.$$

$$Trapèze : \frac{2 \times (0 + 4)}{2} = 4\,m.$$

Le rectangle gauche suppose une vitesse nulle sur l'intervalle ; le rectangle droit suppose une vitesse constante égale à quatre mètres par seconde. Le trapèze suppose une augmentation affine de la vitesse, dont la moyenne vaut deux mètres par seconde.

Ces trois modèles utilisent les mêmes mesures et donnent des estimations différentes. L'objectif est de comprendre ce que l'on calcule et les hypothèses faites entre deux mesures.

5.1 Exploiter les mesures sur tableur

Reprendre le tableau de la page précédente. Les trois estimations du premier intervalle sont fournies ; calculer maintenant celles de tout le trajet.

Travail demandé

1. Saisir les mesures dans deux colonnes et représenter la vitesse en fonction du temps. Relier les points par des segments, sans lissage automatique.

2. Identifier le pas, le nombre de sous-intervalles et le nombre de mesures.

.....

.....

3. Calculer les estimations par rectangles à gauche, rectangles à droite et trapèzes. Préciser l'unité des résultats.

.....

.....

4. Expliquer ce que suppose le modèle des trapèzes entre deux mesures. Peut-on affirmer que le résultat est la distance exacte ?

.....

.....

Conserver la feuille « Mesures ». Les estimations ne garantissent pas un encadrement de la distance réelle sans hypothèse sur la vitesse entre les mesures.

Organisation de la feuille Mesures

Placer les titres en ligne 1 : A « Temps », B « Vitesse », C « Rectangle gauche », D « Rectangle droit », E « Trapèze ». Saisir les six mesures de la ligne 2 à la ligne 7, puis utiliser les formules ci-dessous.

Cellule	Formule	Recopie
C3	=(A3-A2)*B2	Jusqu'à C7
D3	=(A3-A2)*B3	Jusqu'à D7
E3	=(A3-A2)*(B2+B3)/2	Jusqu'à E7

Laisser C2, D2 et E2 vides. Chaque ligne de 3 à 7 décrit l'intervalle entre deux mesures successives. Faire la somme des contributions dans chaque colonne et comparer les trois distances estimées.

5.2 Programmer les méthodes sur tableur

Créer une feuille « Exponentielle » pour $f(x) = e^x$ sur $[0\,;\,1]$. Commencer avec $n = 10$ sous-intervalles.

$$I = \int_0^1 e^x \,\mathrm{dx} = e - 1, \quad h = \frac{b - a}{n}$$

Les paramètres

Placer les libellés en colonne H et les valeurs ou formules en colonne I. Les formules ci-dessous utilisent les noms de fonctions d'un tableur configuré en français.

Cellule	Rôle	Valeur ou formule à saisir
I2	Borne inférieure	0
I3	Borne supérieure	1
I4	Nombre de sous-intervalles	10
I5	Pas	=(I3-I2)/I4
I6	Valeur exacte	=EXP(I3)-EXP(I2)

Le tableau des points et des contributions

Écrire les titres en ligne 1 : A « Indice », B « Abscisse », C « Valeur », D « Rectangle gauche », E « Rectangle droit », F « Trapèze ».

Cellule	Formule ou valeur	Action
A2	0	Premier indice
B2	=$I$2+A2*$I$5	Recopier jusqu'à B12
C2	=EXP(B2)	Recopier jusqu'à C12
A3	=A2+1	Recopier jusqu'à A12
D3	=$I$5*C2	Recopier jusqu'à D12
E3	=$I$5*C3	Recopier jusqu'à E12
F3	=$I$5*(C2+C3)/2	Recopier jusqu'à F12

Chaque ligne de 3 à 12 porte la contribution d'un sous-intervalle : la valeur de la ligne précédente est l'extrémité gauche, celle de la ligne courante est l'extrémité droite. Laisser D2, E2 et F2 vides.

Les résultats

```
I8  : =SOMME(D3:D12)
I9  : =SOMME(E3:E12)
I10 : =SOMME(F3:F12)
I11 : =ABS(I8-$I$6)
I12 : =ABS(I9-$I$6)
I13 : =ABS(I10-$I$6)
```

Ajouter les libellés correspondants en colonne H. Les trois dernières cellules donnent les erreurs absolues. Les signes $ fixent une référence lors de la recopie. Afficher assez de décimales et conserver la précision interne du tableur.

5.3 Maquette et premières vérifications

Voici l'organisation attendue pour la feuille « Exponentielle ». Les lettres de colonnes et les numéros de lignes correspondent aux consignes précédentes. Les résultats affichés sont arrondis ; conserver les formules et leur précision interne.

Feuille Exponentielle • 10 sous-intervalles

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Indice	Abscisse	Valeur	Rectangle gauche	Rectangle droit	Trapèze			
2	0	0	1,000000					Borne inférieure	0
3	1	0,1	1,105171	0,100000	0,110517	0,105259		Borne supérieure	1
4	2	0,2	1,221403	0,110517	0,122140	0,116329		Sous-intervalles	10
5	…	…	…	…	…	…		Pas	0,1
6								Valeur exacte	1,718281828
7									
8								Rectangles gauche	À calculer
9								Rectangles droite	À calculer
10								Trapèzes	À calculer
11								Erreur gauche	À calculer
12	10	1	2,718282	À calculer	À calculer	À calculer		Erreur droite	À calculer
13								Erreur trapèzes	À calculer

La maquette montre les trois premières lignes de points et les deux premières lignes de contributions. Les lignes intermédiaires restent à compléter par recopie ; la dernière ligne est la ligne 12.

Valeurs de contrôle à six décimales

Ligne	Abscisse	Valeur	Gauche	Droite	Trapèze
2	0,000000	1,000000	Vide	Vide	Vide
3	0,100000	1,105171	0,100000	0,110517	0,105259
4	0,200000	1,221403	0,110517	0,122140	0,116329

Ces valeurs permettent de vérifier les références relatives et absolues. À la ligne 3, les contributions portent sur le premier intervalle ; à la ligne 4, elles portent sur le deuxième.

Avant de calculer les sommes

Vérifier que A12 vaut 10, que B12 vaut 1 et que C12 vaut environ 2,718282. Les colonnes D, E et F doivent comporter exactement dix contributions, de la ligne 3 à la ligne 12. Les cellules D2, E2 et F2 restent vides.

Si les premières lignes concordent, poursuivre la recopie puis calculer les résultats et les erreurs en colonne I. Les résultats finaux restent à déterminer.

5.4 Observer la convergence

1. Vérifier que les rectangles à gauche donnent une valeur inférieure à la valeur exacte et ceux à droite une valeur supérieure. Expliquer pourquoi les trapèzes donnent ici une valeur par excès.

.....

.....

2. Dupliquer la feuille pour les nombres de sous-intervalles du tableau. Modifier le paramètre, prolonger les formules et adapter les plages de somme.

La dernière ligne des points est la ligne $n + 2$. Par exemple, pour $n = 20$, le tableau se termine en ligne 22 et les contributions vont de la ligne 3 à la ligne 22.

Exemple pour 20 sous-intervalles :
I8 : =SOMME(D3:D22)
I9 : =SOMME(E3:E22)
I10 : =SOMME(F3:F22)

Changer seulement le paramètre ne suffit pas : vérifier que le dernier indice correspond au nombre de sous-intervalles et que la dernière abscisse est la borne supérieure.

n	h	**Erreur rectangles gauche**	**Erreur rectangles droite**	**Erreur trapèzes**
10				
20				
40				
80				

3. Pour chaque méthode, calculer le rapport de l'erreur avant et après le doublement du nombre de sous-intervalles :

$$Rapport = \frac{E_n}{E_{2n}}$$

De quelles valeurs ces rapports se rapprochent-ils ? Relier cette observation aux puissances du pas étudiées dans la partie 4.

.....

.....

.....

4. Tracer les erreurs en fonction du nombre de sous-intervalles. Utiliser si possible des échelles logarithmiques sur les deux axes pour distinguer les vitesses de convergence.

.....

.....

À conserver

Un fichier tableur avec la feuille des mesures, les essais sur l'exponentielle, un tableau comparatif et quelques phrases expliquant la différence de précision entre rectangles et trapèzes.

5.5 Mini dictionnaire Python

Cette extension utilise uniquement Python et son module math. Les noms de fonctions sont en anglais ; les nombres décimaux s'écrivent avec un point. L'indentation, généralement quatre espaces, délimite le corps des fonctions et des boucles.

Instruction ou écriture	Signification	Exemple
`=`	Affecter une valeur à un nom	h = (b - a) / n
`+  -  *  /`	Addition, soustraction, produit, division	h * f(x)
`**`	Élever à une puissance	x ** 2
`from … import …`	Importer une fonction d'un module	from math import exp
`def`	Définir une fonction	def f(x):
`return`	Renvoyer le résultat d'une fonction	return exp(x)
`for … in range(n)`	Répéter pour les indices 0 à n - 1	for i in range(n):
`range(1, n)`	Indices 1 à n - 1 ; n est exclu	for i in range(1, n):
`[10, 20, 40, 80]`	Une liste de valeurs à parcourir	for n in [10, 20, 40, 80]:
`+=`	Ajouter à une variable	somme += f(x)
`print(...)`	Afficher une valeur	print(resultat)
`abs(...)`	Valeur absolue	abs(resultat - exact)
`round(..., 6)`	Arrondir pour l'affichage	round(resultat, 6)

Lire une fonction

```
from math import exp

def f(x):
    return exp(x)

print(f(0))
print(f(1))
```

1. Exécuter le code. Quels résultats sont affichés ?

.....

.....

2. Remplacer la fonction par une fonction qui renvoie le carré de son argument. Vérifier sa valeur en 2.

.....

.....

Dans la trame Python de cette extension, f est un paramètre : on transmet la fonction à intégrer, sans l'appeler. Par exemple, on écrit rectangles_gauche(f, 0, 1, 10).

5.6 Comprendre un algorithme avec le pseudo-code

Un algorithme est une suite d'étapes permettant de résoudre un problème. Le pseudo-code décrit ces étapes dans un langage proche du français : il aide à comprendre le calcul avant sa traduction en Python. Il ne s'exécute pas directement sur un ordinateur.

La flèche signifie « reçoit la valeur ». Une boucle répète les instructions décalées vers la droite. Renvoyer signifie fournir le résultat du calcul. Le nombre de sous-intervalles est un entier strictement positif.

Rectangles à gauche Lire le pseudo-code

```
Entrées : fonction f, bornes a et b, nombre n

pas ← (b - a) / n
somme ← 0
Pour i allant de 0 à n - 1 :
    x ← a + i × pas
    somme ← somme + f(x)
résultat ← pas × somme
Renvoyer résultat
```

1. À quelle ligne calcule-t-on l'extrémité gauche d'un sous-intervalle ? À quelle ligne ajoute-t-on une hauteur ?

.....

.....

2. Pourquoi la boucle s'arrête-t-elle à l'indice précédent le nombre de sous-intervalles ?

.....

.....

Trapèzes Compléter le pseudo-code

Les valeurs aux bornes comptent chacune pour moitié ; toutes les valeurs intérieures comptent une fois. Compléter les deux étapes manquantes.

```
Entrées : fonction f, bornes a et b, nombre n

pas ← (b - a) / n
somme ← ...
Pour i allant de 1 à n - 1 :
    x ← a + i × pas
    somme ← somme + f(x)
résultat ← ...
Renvoyer résultat
```

3. Expliquer pourquoi les indices des bornes ne sont pas parcourus par cette boucle.

.....

.....

Les sommes sont des sommes de hauteurs. La multiplication finale par le pas donne l'approximation de l'intégrale. Les deux méthodes utilisent les mêmes points et les mêmes valeurs que le tableur.

5.7 Traduire le pseudo-code en Python

Compléter chaque emplacement « ___ » avec une expression Python. La trame n'est pas exécutable avant d'être complétée. S'appuyer sur le pseudo-code et le mini dictionnaire ; conserver l'indentation.

from math import exp

```
def f(x):
    return exp(x)

def rectangles_gauche(f, a, b, n):
    h = ___
    somme = 0
    for i in range(n):
        x = ___
        somme += ___
    return ___

def trapezes(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    somme = ___
    for i in range(1, n):
        x = a + i * h
        somme += f(x)
    return ___
```

Exécuter et vérifier

Une fois les fonctions complétées, ajouter ce bloc à la suite. Comparer les résultats avec les valeurs du tableur, puis avec la valeur exacte. Les erreurs sont calculées avant les arrondis d'affichage.

```
exact = exp(1) - 1
for n in [10, 20, 40, 80]:
    rg = rectangles_gauche(f, 0, 1, n)
    tr = trapezes(f, 0, 1, n)
    print(n, round(rg, 6), round(tr, 6))
    print("Erreurs :", abs(rg - exact), abs(tr - exact))
```

1. Les résultats concordent-ils avec ceux du tableur ? Interpréter les éventuelles différences dues aux arrondis.

.....

.....

2. Adapter les rectangles à gauche pour obtenir les rectangles à droite. Les indices doivent aller de 1 au nombre de sous-intervalles inclus.

.....

.....

Pour poursuivre. Remplacer l'exponentielle par le carré et intégrer entre zéro et deux. Comparer à la valeur exacte connue et vérifier le sens des erreurs.