Probabilités Corrigés

Seconde • Vérifications du cours et corrigés des trois fiches

Les résultats suivent l'ordre du document élève. Pour les fractions, toute écriture équivalente est acceptée. Les pourcentages approchés sont signalés.

Les vérifications du cours

1 Dé à vingt faces

$\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$. La loi est $5/20\,;\,5/20\,;\,4/20\,;\,3/20\,;\,2/20\,;\,1/20$, soit $1/4\,;\,1/4\,;\,1/5\,;\,3/20\,;\,1/10\,;\,1/20$. La somme vaut 1. Les numéros ne sont pas équiprobables, puisque leurs probabilités diffèrent.

2 Dénombrement et réunion

Dé équilibré : « obtenir 1 ou 6 » a pour probabilité $2/6 = 1/3$.
Jeu de 32 cartes : les évènements « valet » et « roi » sont incompatibles ; $P(valet\ ou\ roi) = 4/32 + 4/32 = 1/4$.

3 Fréquences

La probabilité de pile au lancer suivant reste $1/2$. Les lancers sont indépendants ; les résultats précédents ne créent pas de compensation obligatoire.

4 Probabilité conditionnelle

Parmi les 19 élèves qui ne suivent pas l'anglais, 7 suivent l'espagnol : $P_{\overline{A}}(E) = 7/19 \approx 36{,}8\,\%$.

5 Arbre des ateliers

$P(\overline{A} \cap \overline{E}) = (19/35) \times (12/19) = 12/35$. Dans le tableau, 12 élèves sur 35 ne suivent aucun des deux ateliers.
$11/35$ est la probabilité de E dans toute la population. Depuis A, le bon groupe de référence contient 16 élèves ; depuis $\overline{A}$, il en contient 19. Les poids attendus sont $4/16$ et $7/19$.

6 Test diagnostique

Parmi les $9\,712$ personnes ayant un test négatif, 10 sont malades.
$P_{\overline{T}}(M) = 10/9\,712 \approx 0{,}00103$, soit environ $0{,}103\,\%$.
Ne pas confondre ce résultat avec $10/100 = 10\,\%$, qui est le taux de faux négatifs parmi les malades.

Points à surveiller : le groupe de référence au dénominateur, l'ordre de « sachant que », le sens des branches et la distinction entre une branche et un chemin complet.

Fiche 1 Corrigés des exercices 1 et 2

Exercice 1 Traduire sans confondre

1. $P(C)$: probabilité que l'élève choisi déjeune à la cantine.
$P_B(C)$: probabilité de déjeuner à la cantine sachant que l'élève vient en bus.
$P_C(B)$: probabilité de venir en bus sachant que l'élève déjeune à la cantine.
$P(B \cap C)$: probabilité que l'élève vienne en bus et déjeune à la cantine.

2. a. Le groupe de référence est celui des élèves venant en bus : dénominateur 120.
b. Le groupe de référence est celui des élèves de la cantine : dénominateur 150.
c. Le groupe de référence est tout le lycée : dénominateur 200.

Exercice 2 Passer des mots aux calculs

$$P_B(C) = \frac{100}{120} = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\ \%$$

Parmi les élèves venant en bus, environ $83{,}3\ \%$ déjeunent à la cantine.

1. $P_C(B) = 100/150 = 2/3 \approx 66{,}7\ \%$. Parmi les élèves de la cantine, environ $66{,}7\ \%$ viennent en bus.
Le numérateur 100 correspond à l'intersection $B \cap C$ dans les deux cas, mais le groupe de référence passe de 120 à 150 élèves. Les deux conditionnements sont inverses et les résultats sont différents.

2. $P_{\overline{B}}(C) = 50/80 = 5/8 = 62{,}5\ \%$. Parmi les élèves qui ne viennent pas en bus, $62{,}5\ \%$ déjeunent à la cantine.

3. $P_B(\overline{C}) = 20/120 = 1/6 \approx 16{,}7\ \%$. Parmi les élèves venant en bus, environ $16{,}7\ \%$ ne déjeunent pas à la cantine.

Contrôle : $P_B(C) + P_B(\overline{C}) = 5/6 + 1/6 = 1$. Les deux évènements se partagent le même groupe de référence B.

Fiche 1 Corrigés des exercices 3 et 4

Exercice 3 Deux options au lycée

	Robotique R	**Pas robotique $\overline{R}$**	**Total**
Langue L	30	40	70
Pas langue $\overline{L}$	50	80	130
Total	80	120	200

1. Langue sans robotique : $70 - 30 = 40$. Robotique sans langue : $80 - 30 = 50$. Aucune option : $200 - (30 + 40 + 50) = 80$.

2. $P(R \cap L) = 30/200 = 3/20 = 15\,\%$. Il s'agit de la proportion d'élèves qui suivent les deux options dans tout le lycée.
$P_R(L) = 30/80 = 3/8 = 37{,}5\,\%$. Il s'agit de la proportion qui suit la langue parmi les élèves suivant la robotique.

3. $P_L(R) = 30/70 = 3/7 \approx 42{,}9\,\%$.
$P_{\overline{R}}(L) = 40/120 = 1/3 \approx 33{,}3\,\%$.

4. Le groupe « au moins une option » contient $80 + 70 - 30 = 120$ élèves. Parmi eux, 30 suivent les deux, donc la proportion vaut $30/120 = 1/4 = 25\,\%$.

Exercice 4 Corriger une copie

1. « Parmi les élèves qui suivent la robotique » désigne un groupe de 80 élèves. Il faut donc écrire $P_R(L) = 30/80 = 37{,}5\,\%$, et non $30/70$.

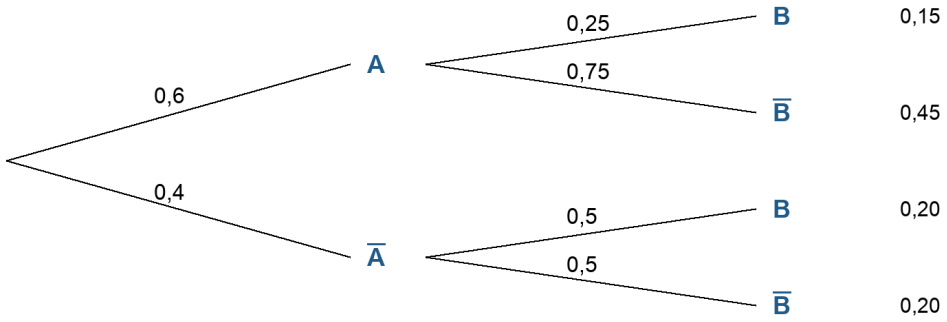
2. Le quotient $30/70$ correspond à $P_L(R)$: parmi les élèves suivant la langue, la proportion qui suit la robotique.

3. $P(R \cap L) = 30/200 = 15\,\%$. Le quotient $30/80$ correspond à $P_R(L)$, une probabilité conditionnelle, et non à la probabilité de l'intersection dans toute la population.

Pour distinguer les trois écritures, faire reformuler : « dans toute la population », « parmi R » et « parmi L ».

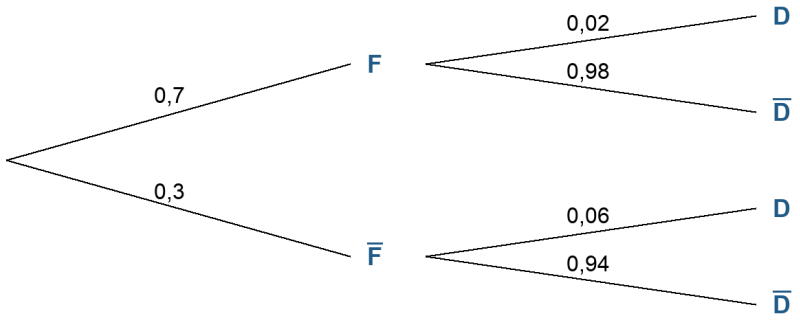
Fiche 2 Corrigés des exercices 5 et 6

Exercice 5 Un arbre à compléter



1. Poids manquants : $1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $1 - 0{,}25 = 0{,}75$; $1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
2. $P(A) = 0{,}6$; $P_A(B) = 0{,}25$; $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$.
3. $P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$.
$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}20$.

Exercice 6 Un contrôle de production

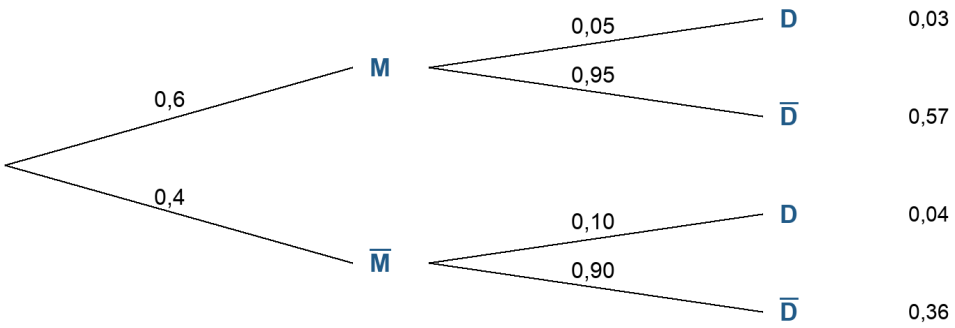


1. $P_{\overline{F}}(D) = 0{,}06$: parmi les objets qui ne proviennent pas de F, 6 % présentent un défaut.
2. $P(F \cap D) = 0{,}7 \times 0{,}02 = 0{,}014 = 1{,}4\,\%$.
$P(\overline{F} \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}06 = 0{,}018 = 1{,}8\,\%$.
3. Le poids 0,06 porte sur le seul groupe $\overline{F}$, pas sur toute la production. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle. On ne peut pas l'interpréter comme $P(D)$.

Les valeurs à droite de l'arbre corrigé sont les probabilités des chemins ; elles ne remplacent pas les poids conditionnels des branches.

Fiche 2 Corrigés des exercices 7 et 8

Exercice 7 Deux machines



1. $P(M) = 180/300 = 0{,}6$ et $P(\overline{M}) = 120/300 = 0{,}4$.
Depuis M : $P_M(D) = 9/180 = 0{,}05$ et $P_M(\overline{D}) = 171/180 = 0{,}95$.
Depuis $\overline{M}$: $P_{\overline{M}}(D) = 12/120 = 0{,}10$ et $P_{\overline{M}}(\overline{D}) = 108/120 = 0{,}90$.

2. $P(M \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}03 = 3\,\%$, soit $9/300$.
$P(\overline{M} \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}10 = 0{,}04 = 4\,\%$, soit $12/300$.
On retrouve les effectifs des deux cases défectueuses rapportés au total 300.

Exercice 8 Peut-on lire un arbre à l'envers

1. $P_A(B) = 0{,}75$.
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3$.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$$

2. $P_B(A) = 0{,}6$, tandis que $P_A(B) = 0{,}75$. Le conditionnement change : parmi B n'est pas parmi A. La branche portant $0{,}75$ est placée après A et donne B sachant A ; elle ne se lit pas dans l'autre sens.

La probabilité $P(B) = 0{,}5$ était donnée. Le calcul utilise directement la définition de la probabilité conditionnelle ; il ne demande pas de formule générale de probabilités totales.

Fiche 3 Corrigés des exercices 9 et 10

Exercice 9 Comparer deux taux de défaut

1. $P(D) = 16/200 = 8\,\%$: taux de défaut sur toute la production.
$P_A(D) = 12/120 = 10\,\%$: taux de défaut parmi les objets issus de A.
$P_D(A) = 12/16 = 75\,\%$: part des objets de A parmi les objets défectueux.

2. L'autre machine présente un taux de défaut de $4/80 = 5\,\%$. La machine A a donc ici un taux de défaut supérieur : $10\,\%$ contre $5\,\%$. On compare deux probabilités conditionnelles calculées dans les deux sous-populations de fabrication.

3. Les $75\,\%$ concernent les 16 objets défectueux : 12 proviennent de A. Cela ne signifie pas que $75\,\%$ des 120 objets de A sont défectueux. L'affirmation inverse le conditionnement. Le bon taux de défaut de A est $10\,\%$.

Exercice 10 Un test dans une population

1. Faux positifs : 48 personnes non malades dont le test est positif.
Faux négatifs : 4 personnes malades dont le test est négatif.

2. Sensibilité : $P_M(T) = 36/40 = 90\,\%$.
Spécificité : $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 912/960 = 95\,\%$.
Les dénominateurs sont respectivement le groupe des malades et le groupe des non-malades.

$$P_T(M) = \frac{36}{84} = \frac{3}{7} \approx 42{,}9\,\%$$

3. Parmi les 84 personnes positives, 36 sont malades : environ $42{,}9\,\%$. Cette probabilité est différente de la sensibilité $P_M(T) = 90\,\%$. Le groupe de référence n'est pas le même.

Ne pas confondre non plus $48/960 = 5\,\%$, taux de faux positifs parmi les non-malades, avec $48/84 \approx 57{,}1\,\%$, proportion de non-malades parmi les personnes positives.

Fiche 3 Corrigés des exercices 11 et 12

Exercice 11 Même test autre population

1. Sensibilité : $P_M(T) = 180/200 = 90\,\%$.
Spécificité : $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 760/800 = 95\,\%$.
Ces deux performances sont identiques à celles de l'exercice 10.

2. $P_T(M) = 180/220 = 9/11 \approx 81{,}8\,\%$.

3. La proportion de malades passe de $40/1\,000 = 4\,\%$ à $200/1\,000 = 20\,\%$. Dans la deuxième population, les vrais positifs sont beaucoup plus nombreux par rapport aux faux positifs : 180 contre 40, au lieu de 36 contre 48. La probabilité d'être malade parmi les positifs passe donc d'environ $42{,}9\,\%$ à $81{,}8\,\%$, même si sensibilité et spécificité restent inchangées.

Exercice 12 Vrai ou faux et pourquoi

a. Faux. Les deux tableaux contiennent des faux positifs : 48 dans le premier, 40 dans le second. Un test positif ne garantit donc pas la maladie.

b. Vrai. Par exemple, dans l'exercice 10, $P_T(M) \approx 42{,}9\,\%$, tandis que $P_M(T) = 90\,\%$. Les groupes de référence sont différents.

c. Faux. Toute probabilité conditionnelle est comprise entre 0 et 1. Dans un tableau, l'intersection comptée au numérateur est une partie du groupe de référence : son effectif ne peut pas dépasser le dénominateur.

d. Non. « Fiable à $95\,\%$ » ne précise pas quelle probabilité est mesurée. Il faut connaître le sens du pourcentage et disposer des effectifs du groupe positif, ou d'informations suffisantes sur la population et les performances du test. Les exercices 10 et 11 montrent notamment que la proportion de malades intervient.

Prolongement Monty Hall

Le premier choix est la voiture avec probabilité $1/3$: garder gagne et changer perd. Le premier choix est une chèvre avec probabilité $2/3$: garder perd et changer gagne. Donc $P(gagner\ en\ gardant) = 1/3$ et $P(gagner\ en\ changeant) = 2/3$. Les fréquences d'un petit nombre de parties peuvent s'écarter de ces valeurs. La conclusion dépend des règles imposées au présentateur.