Chapitre V Probabilités

Seconde • Cours et fiches d'exercices

Objectifs : choisir un modèle, calculer des probabilités, comprendre « sachant que », utiliser un tableau ou un arbre et distinguer deux conditionnements inverses.

Parcours : cours pages 1 à 7 ; fiches d'exercices pages 8 à 13 ; prolongement Monty Hall page 14.

1 Décrire une expérience et choisir un modèle

Une situation pour commencer

Un dé possède vingt faces : cinq portent le numéro 1, cinq le numéro 2, quatre le numéro 3, trois le numéro 4, deux le numéro 5 et une le numéro 6. On suppose le dé équilibré : chaque face a la probabilité $1/20$ d'apparaître. On relève le numéro obtenu.

1. Écrire l'ensemble Ω des numéros possibles.

.....

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité						

2. Compléter le tableau. Les six numéros sont-ils équiprobables ? Justifier.

.....

.....

Vocabulaire

Une expérience aléatoire a une issue que l'on ne peut pas prévoir avec certitude avant de la réaliser. L'univers Ω est l'ensemble des issues possibles.

Un évènement est une partie de Ω : il peut contenir aucune issue, une issue ou plusieurs. Un évènement élémentaire contient une seule issue. $\emptyset$ désigne l'évènement impossible ; Ω est l'évènement certain.

La situation réelle et le modèle

Un modèle probabiliste associe des probabilités aux issues. L'équiprobabilité est une hypothèse du modèle : elle ne se démontre pas en lançant quelques fois le dé. Il faut préciser ce qui est supposé équiprobable.

Exemple : pour le dé ci-dessus, les vingt faces sont équiprobables, mais les six numéros ne le sont pas. Pour une punaise, on n'a aucune raison de supposer les deux positions équiprobables.

Réflexe : avant de calculer, je précise l'expérience, les issues et les hypothèses du modèle.

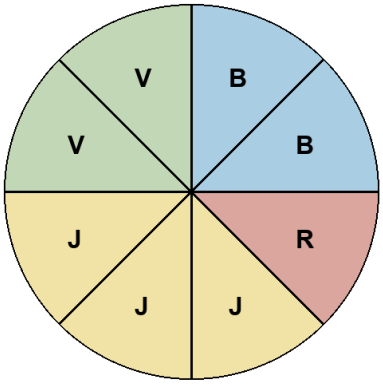
2 Calculer des probabilités

Loi de probabilité

Dans un univers fini, une loi de probabilité attribue à chaque issue un nombre positif ou nul. La somme de ces nombres vaut 1. La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui le composent.

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad P(\Omega) = 1 \qquad P(\emptyset) = 0$$

Exemple : la roue ci-dessous possède huit secteurs de même angle, supposés équiprobables. On relève uniquement la couleur.



8 secteurs de même angle

B : bleu → 2 secteurs

R : rouge → 1 secteur

J : jaune → 3 secteurs

V : vert → 2 secteurs

Couleur	Bleu	Rouge	Jaune	Vert
Probabilité	$1/4$	$1/8$	$3/8$	$1/4$

Pour E : « obtenir bleu ou rouge », $P(E) = 1/4 + 1/8 = 3/8$. Les couleurs ne sont pas équiprobables.

Dénombrer dans un modèle équiprobable

Lorsque toutes les issues de l'univers choisi sont équiprobables :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{nombre\ d'issues\ favorables}{nombre\ total\ d'issues}$$

$Card(A)$ est le nombre d'éléments de A. Dans un jeu de 32 cartes tirées avec équiprobabilité, « tirer un as » comporte quatre issues : sa probabilité vaut $4/32 = 1/8$.

Méthode : vérifier l'équiprobabilité, compter toutes les issues puis les issues favorables, et écrire le quotient.

Vérification rapide

On lance un dé à six faces supposé équilibré. Calculer la probabilité d'obtenir 1 ou 6.

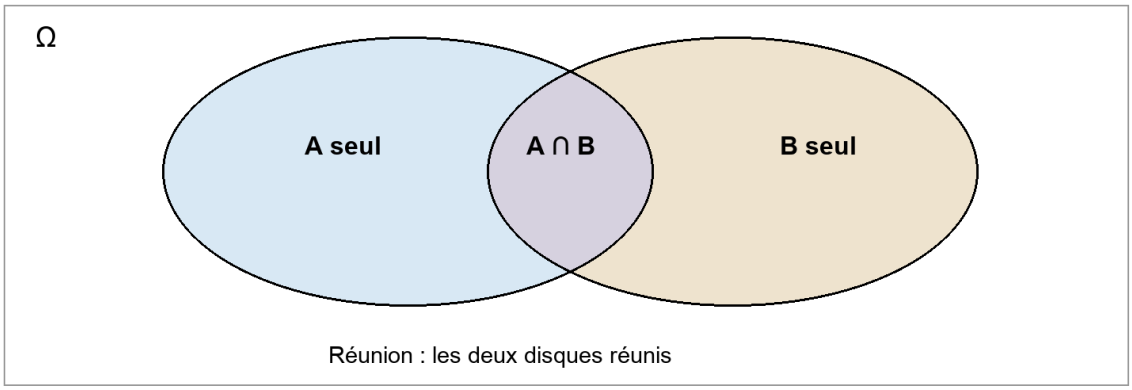
.....

2 Calculer avec des évènements

Contraire intersection et réunion

L'évènement contraire de A se note $\overline{A}$. Il se réalise exactement lorsque A ne se réalise pas. Ainsi $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

$A \cap B$ correspond à « A et B » : les deux se réalisent simultanément.
$A \cup B$ correspond à « A ou B » : au moins l'un des deux se réalise, éventuellement les deux.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

On retranche une fois l'intersection, car elle a été comptée deux fois dans la somme $P(A) + P(B)$.

Un exemple résolu

On lance un dé équilibré. A : « obtenir un nombre impair » et B : « obtenir un multiple de 3 ».
$A = \{1\,;\,3\,;\,5\}$, $B = \{3\,;\,6\}$ et $A \cap B = \{3\}$.
$P(A \cup B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 2/3$.
$P(\overline{A}) = 1 - 3/6 = 1/2$.

Évènements incompatibles

A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$. Alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Exemple : tirer un valet et tirer un roi dans un seul tirage de carte.

Le mot « ou » n'exclut pas que les deux évènements se réalisent. Pour additionner directement, je vérifie l'incompatibilité.

Vérification : dans un jeu de 32 cartes, calculer la probabilité de tirer un valet ou un roi.

.....

3 Relier fréquences et probabilités

La fréquence est calculée à partir d'observations. La probabilité appartient au modèle. Pour des épreuves identiques et indépendantes, un grand nombre d'essais donne généralement une fréquence proche de la probabilité.

La fréquence peut encore fluctuer : elle ne se rapproche pas nécessairement de la probabilité à chaque nouvel essai.

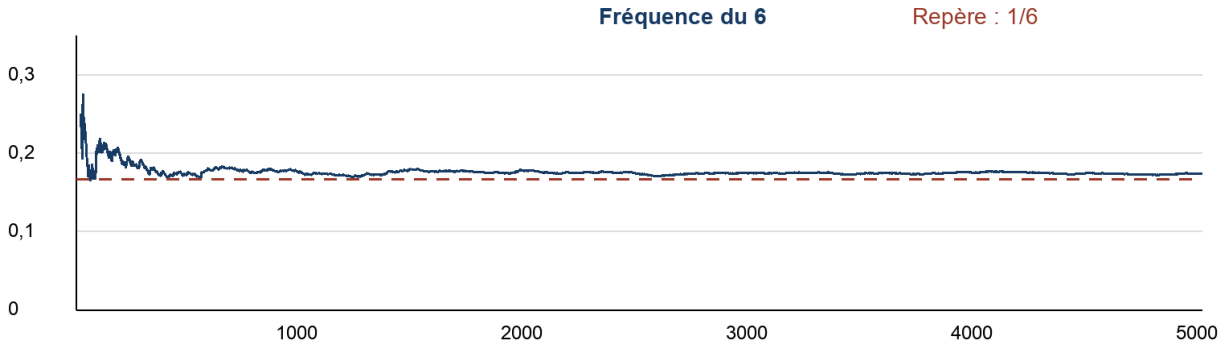
Une simulation Python

On simule des lancers indépendants d'un dé à six faces supposé équilibré. Pour n entier strictement positif :

```
from random import randint

def frequence_six(n):
    nombre_six = 0
    for _ in range(n):
        if randint(1, 6) == 6:
            nombre_six += 1
    return nombre_six / n

print(frequence_six(100))
print(frequence_six(5000))
```



Le graphique représente une réalisation possible. Il ne prouve pas qu'un dé réel est équilibré : la simulation utilise déjà le modèle choisi.

Construire un modèle à partir de données

Pour une punaise, 620 résultats « pointe en haut » sur $1\,000$ lancers donnent une fréquence de $0{,}62$. On peut proposer, à titre de modèle approché, $P(haut) = 0{,}62$ et $P(côté) = 0{,}38$. Ces données sont fictives ; le modèle dépend du protocole et des observations.

Vérification : après cinq résultats face avec une pièce équilibrée et des lancers indépendants, la probabilité de pile au lancer suivant dépasse-t-elle $1/2$? Justifier.

.....

.....

4 Comprendre une probabilité conditionnelle

La question « parmi » change le groupe de référence

Parmi 35 élèves inscrits à des ateliers facultatifs, 16 suivent l'anglais, 11 l'espagnol et 4 les deux. On choisit un élève au hasard, avec équiprobabilité. A signifie « suivre l'anglais » et E « suivre l'espagnol ».

	Anglais A	**Pas anglais $\overline{A}$**	**Total**
Espagnol E	4	7	11
Pas espagnol $\overline{E}$	12	12	24
Total	16	19	35

Dans toute la population, $P(E) = 11/35$. Parmi les 16 élèves qui suivent l'anglais, 4 suivent l'espagnol : la proportion est $4/16 = 1/4$.

On dit que la probabilité de E sachant A vaut $1/4$. Elle se note $P_A(E)$. Dans une étude statistique, $4/16$ est une fréquence conditionnelle ; le tirage équiprobable lui donne une interprétation probabiliste.

Définition

Si $P(A) > 0$, la probabilité de B sachant A est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dans une population finie où chaque individu est choisi avec la même probabilité, si A est non vide :

$$P_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}$$

Méthode : je repère le groupe après « parmi » ou « sachant que ». Son effectif est le dénominateur. Au numérateur, je compte ceux de ce groupe qui vérifient aussi la propriété demandée.

Un exemple résolu et une vérification

$P_A(E) = 4/16$ répond à « parmi ceux qui suivent l'anglais, qui suit l'espagnol ? ».
$P_E(A) = 4/11$ répond à la question inverse. Le numérateur est le même, mais le dénominateur change.

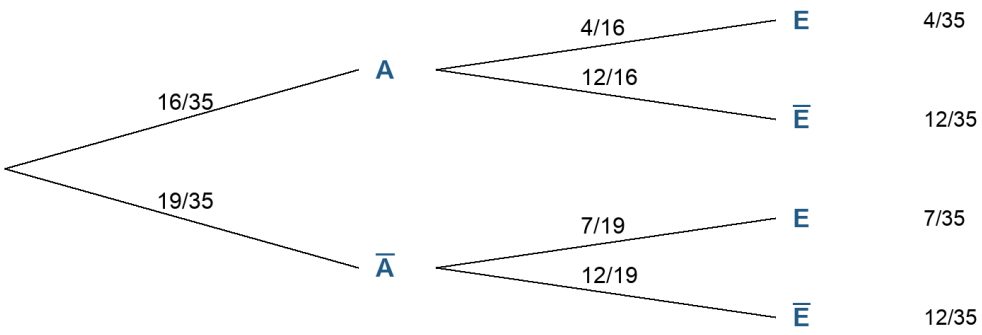
Calculer la probabilité de suivre l'espagnol sachant que l'élève ne suit pas l'anglais. Écrire la notation et le quotient.

.....

.....

5 Représenter avec un arbre pondéré

On reprend le tableau des ateliers. Le premier niveau distingue A et $\overline{A}$; le second distingue E et $\overline{E}$ à l'intérieur de chacun de ces groupes. Les lettres sont placées aux extrémités des branches.



Interpréter les poids

Le premier niveau porte $P(A) = 16/35$ et $P(\overline{A}) = 19/35$.
Depuis A, les branches portent $P_A(E) = 4/16$ et $P_A(\overline{E}) = 12/16$.
Depuis $\overline{A}$, elles portent $P_{\overline{A}}(E) = 7/19$ et $P_{\overline{A}}(\overline{E}) = 12/19$.

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1. Une probabilité du second niveau est conditionnelle : elle dépend du chemin déjà suivi.

Calculer une intersection en suivant un chemin

$$P(A \cap E) = P(A) \times P_A(E) = \frac{16}{35} \times \frac{4}{16} = \frac{4}{35}$$

On retrouve les 4 élèves qui suivent les deux ateliers parmi les 35 élèves. La règle du produit vient de la définition : $P_A(E) = P(A \cap E)/P(A)$. Les valeurs à droite de l'arbre sont les probabilités des chemins complets.

Lorsque plusieurs chemins disjoints décrivent les issues d'un évènement, on peut additionner leurs probabilités sur un exemple. La formule générale des probabilités totales n'est pas à apprendre dans ce chapitre.

Vérification rapide

Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{E})$ en suivant le chemin adapté, puis vérifier dans le tableau.

.....

.....

Pourquoi serait-il incorrect d'inscrire $11/35$ sur toutes les branches qui aboutissent à E ?

.....

6 Distinguer les conditionnements inverses

Un test diagnostique

Les données suivantes sont fictives et servent uniquement à comprendre les probabilités. On choisit une personne au hasard, avec équiprobabilité. M signifie « être malade » et T « avoir un test positif ».

	Malade M	Non malade $\overline{M}$	Total
Test positif T	90	198	288
Test négatif $\overline{T}$	10	9 702	9 712
Total	100	9 900	10 000

Vrai positif : $M \cap T$, soit 90 personnes. Faux négatif : $M \cap \overline{T}$, soit 10.
Faux positif : $\overline{M} \cap T$, soit 198. Vrai négatif : $\overline{M} \cap \overline{T}$, soit 9 702.

Sensibilité et spécificité

La sensibilité est la probabilité d'un test positif sachant la maladie :
$P_M(T) = 90/100 = 90\,\%$.

La spécificité est la probabilité d'un test négatif sachant l'absence de maladie :
$P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 9\,702/9\,900 = 98\,\%$.

Le taux de faux positifs parmi les non-malades est $198/9\,900 = 2\,\%$. Le taux de faux négatifs parmi les malades est $10/100 = 10\,\%$.

Inverser le conditionnement

Parmi les personnes positives, il y a 90 malades sur 288. Ainsi :

$$P_T(M) = \frac{90}{288} = 0{,}3125 = 31{,}25\,\%$$

$P_M(T) = 90\,\%$ et $P_T(M) = 31{,}25\,\%$ répondent à deux questions différentes. Les non-malades étant très nombreux, un faible taux de faux positifs peut représenter un effectif important.

Je traduis toujours la probabilité en français avant de choisir le dénominateur. Un test positif ne signifie pas automatiquement que la personne est malade.

Vérification rapide

Parmi les personnes ayant un test négatif, quelle proportion est malade ? Écrire la notation et le quotient.

.....

.....

Fiche 1 Tableaux et probabilités conditionnelles

Objectif : choisir le bon groupe de référence et traduire les questions. Donner une fraction simplifiée ou un pourcentage, selon la consigne.

Exercice 1 Traduire sans confondre

Dans un lycée de 200 élèves, on choisit un élève au hasard, avec équiprobabilité. On note B : « venir en bus » et C : « déjeuner à la cantine ».

	Bus B	**Pas de bus $\overline{B}$**	**Total**
Cantine C	100	50	150
Pas de cantine $\overline{C}$	20	30	50
Total	120	80	200

1. Écrire en français ce que signifie chacune des notations :
$P(C)$; $P_B(C)$; $P_C(B)$; $P(B \cap C)$.

.....

.....

.....

.....

2. Associer chaque question à son dénominateur, sans calculer :
a. Parmi les élèves venant en bus, quelle proportion déjeune à la cantine ?
b. Parmi ceux qui déjeunent à la cantine, quelle proportion vient en bus ?
c. Quelle proportion des élèves vient en bus et déjeune à la cantine ?

.....

.....

Exercice 2 Passer des mots aux calculs

On utilise le même tableau. Pour chaque question, écrire la notation, le quotient et le résultat.

Premier calcul guidé : $P_B(C)$ = effectif de $B \cap C$ / effectif de B = ... / ..... = ...

1. Calculer $P_C(B)$, puis expliquer pourquoi ce n'est pas la même probabilité que $P_B(C)$.

.....

.....

2. Calculer la probabilité de déjeuner à la cantine sachant que l'élève ne vient pas en bus.

.....

.....

3. Calculer la probabilité de ne pas déjeuner à la cantine sachant que l'élève vient en bus.

.....

Fiche 1 (suite) Construire et vérifier un tableau

Exercice 3 Deux options au lycée

Sur 200 élèves, 80 suivent l'option robotique, 70 l'option langue et 30 suivent les deux. On choisit un élève au hasard, avec équiprobabilité. R signifie « suivre la robotique » et L « suivre l'option langue ».

1. Compléter le tableau.

	Robotique R	**Pas robotique $\overline{R}$**	**Total**
Langue L	30		70
Pas langue $\overline{L}$			
Total	80		200

2. Calculer $P(R \cap L)$ et $P_R(L)$. Interpréter la différence entre ces deux résultats.

.....

.....

.....

3. Calculer $P_L(R)$ et $P_{\overline{R}}(L)$.

.....

.....

4. Parmi les élèves suivant au moins l'une des deux options, quelle proportion suit les deux ? Écrire d'abord l'effectif du groupe de référence.

.....

.....

Exercice 4 Corriger une copie

Une élève utilise les données de l'exercice 3 et écrit :
« Parmi les élèves qui suivent la robotique, la probabilité de suivre la langue est $P_R(L) = 30/70$. »

1. Expliquer l'erreur, puis réécrire la phrase et le calcul correctement.

.....

.....

2. À quelle probabilité correspond réellement $30/70$?

.....

3. Un autre élève écrit $P(R \cap L) = 30/80$. Corriger son calcul et préciser ce que représente $30/80$.

.....

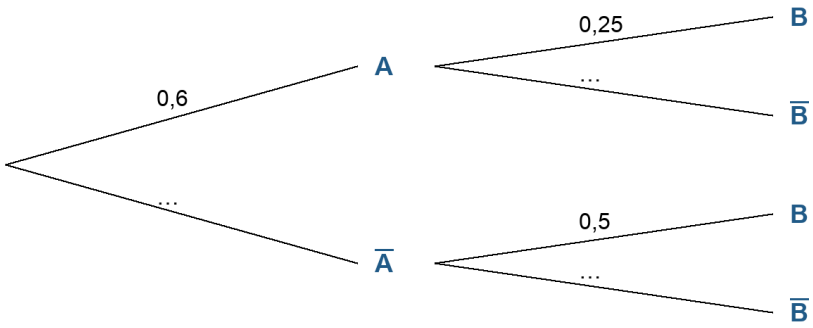
.....

Fiche 2 Compléter et lire des arbres

Les lettres sont placées au bout des branches. Les nombres portés par les branches sont des probabilités, parfois conditionnelles. Les modèles et tirages décrits dans cette fiche sont supposés valides.

Exercice 5 Un arbre à compléter

1. Compléter les trois poids manquants dans l'arbre ci-dessous.



2. Lire $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$.

.....

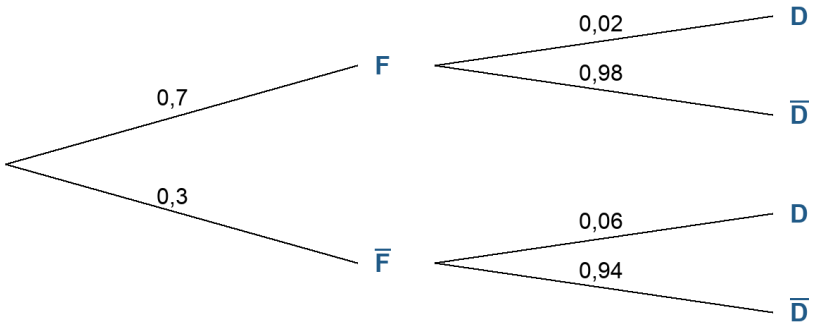
3. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$ en suivant les chemins adaptés.

.....

.....

Exercice 6 Un contrôle de production

On choisit au hasard un objet dans une production. F signifie « provenir du fournisseur F » et D « présenter un défaut ».



1. Traduire en français $P_{\overline{F}}(D)$, puis donner sa valeur.

.....

2. Calculer $P(F \cap D)$ et $P(\overline{F} \cap D)$.

.....

3. Pourquoi le poids $0{,}06$ ne représente-t-il pas $P(D)$ dans toute la production ?

.....

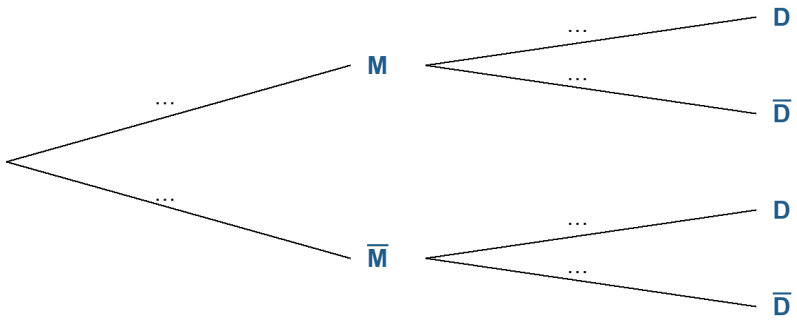
Fiche 2 (suite) Passer du tableau à l'arbre

Exercice 7 Deux machines

Parmi 300 objets, on choisit un objet au hasard, avec équiprobabilité. M signifie « provenir de la machine M » et D « présenter un défaut ».

	Machine M	Autre machine $\overline{M}$	Total
Défectueux D	9	12	21
Non défectueux $\overline{D}$	171	108	279
Total	180	120	300

1. Compléter les six probabilités de l'arbre, en utilisant le tableau.



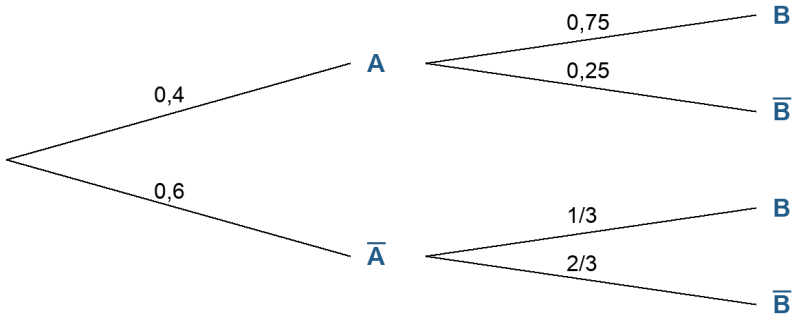
2. Calculer $P(M \cap D)$ et $P(\overline{M} \cap D)$ avec l'arbre, puis vérifier dans le tableau.

.....

.....

Exercice 8 Peut-on lire un arbre à l'envers

On donne l'arbre suivant et, en plus, $P(B) = 0{,}5$.



1. Lire $P_A(B)$, puis calculer $P(A \cap B)$.

.....

2. Calculer $P_B(A)$. Expliquer pourquoi on ne peut pas simplement lire $0{,}75$ à l'envers.

.....

.....

Fiche 3 Contrôle qualité et dépistage

Exercice 9 Comparer deux taux de défaut

On contrôle 200 objets et on en choisit un au hasard, avec équiprobabilité. A signifie « provenir de la machine A » et D « présenter un défaut ».

	Machine A	**Autre machine $\overline{A}$**	**Total**
Défectueux D	12	4	16
Non défectueux $\overline{D}$	108	76	184
Total	120	80	200

1. Calculer $P(D)$, $P_A(D)$ et $P_D(A)$. Exprimer chaque résultat en pourcentage.

.....

.....

2. La machine A présente-t-elle le même taux de défaut que l'autre machine ? Justifier par les bons quotients.

.....

.....

3. « 75 % des objets défectueux viennent de A, donc 75 % des objets de A sont défectueux. » Expliquer l'erreur.

.....

.....

Exercice 10 Un test dans une population

Les données sont fictives. On choisit une personne au hasard, avec équiprobabilité, parmi 1 000 personnes. M signifie « être malade » et T « avoir un test positif ».

	Malade M	**Non malade $\overline{M}$**	**Total**
Test positif T	36	48	84
Test négatif $\overline{T}$	4	912	916
Total	40	960	1 000

1. Indiquer les effectifs des faux positifs et des faux négatifs.

.....

2. Calculer la sensibilité $P_M(T)$ et la spécificité $P_{\overline{M}}(\overline{T})$.

.....

.....

3. Calculer $P_T(M)$. Est-elle égale à $P_M(T)$? Interpréter.

.....

.....

Fiche 3 (suite) Discuter une conclusion

Exercice 11 Même test autre population

Le même type de test est utilisé dans une deuxième population de $1\,000$ personnes. Les données restent fictives. Les notations M et T ont le même sens qu'à l'exercice 10.

	Malade M	**Non malade $\overline{M}$**	**Total**
Test positif T	180	40	220
Test négatif $\overline{T}$	20	760	780
Total	200	800	$1\,000$

1. Calculer la sensibilité et la spécificité. Comparer à l'exercice 10.

.....

.....

2. Calculer $P_T(M)$ dans cette deuxième population. Donner un pourcentage arrondi au dixième.

.....

.....

3. La sensibilité et la spécificité sont identiques dans les deux tableaux. Pourquoi $P_T(M)$ change-t-elle ? Appuyer la réponse sur la proportion de malades dans chaque population.

.....

.....

.....

Exercice 12 Vrai ou faux et pourquoi

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier. On peut utiliser les tableaux des exercices 10 et 11.

a. « Un résultat positif signifie nécessairement que la personne est malade. »

.....

b. « La probabilité d'être malade sachant le test positif peut être différente de la probabilité d'un test positif sachant la maladie. »

.....

.....

c. « Une probabilité conditionnelle peut être supérieure à 1 parce que le groupe de référence est plus petit. »

.....

d. « Le test est fiable à $95\ \%$. » Cette phrase seule suffit-elle à déterminer $P_T(M)$? Préciser les informations qui manquent.

.....

.....

Prolongement facultatif Le jeu de Monty Hall

Cette activité peut être menée après les fiches. Elle permet de discuter les hypothèses d'un modèle et d'observer des fréquences simulées.

Les règles du jeu

Une voiture est placée avec équiprobabilité derrière l'une de trois portes ; les deux autres cachent une chèvre. Tu choisis une porte. Le présentateur connaît la position de la voiture. Il ouvre toujours une autre porte cachant une chèvre et propose toujours de changer pour la dernière porte fermée. S'il peut ouvrir deux portes, il choisit au hasard entre elles.

1. Avant de jouer, préfères-tu garder ou changer ? Expliquer ton intuition.

.....

.....

2. En groupes, réaliser 20 parties pour chaque stratégie avec trois cartes. Noter les résultats, puis comparer les fréquences de la classe.

Stratégie	Victoires	Défaites	Fréquence de victoire
Garder			
Changer			

3. Compléter le tableau de raisonnement.

Premier choix	Probabilité	En gardant	En changeant
Voiture	…	…	…
Chèvre	…	…	…

4. En déduire les probabilités de gagner selon la stratégie.

.....

.....

Simulation simplifiée du résultat

```
from random import randint

def monty_hall(n, changer):
    victoires = 0
    for _ in range(n):
        voiture = randint(1, 3)
        choix = randint(1, 3)
        gain = (choix != voiture) if changer else (choix == voiture)
        if gain:
            victoires += 1
    return victoires / n
```

Pour $n > 0$, comparer monty_hall(10000, False) et monty_hall(10000, True). Le code utilise le fait que changer gagne exactement lorsque le premier choix était une chèvre ; il n'affiche pas la porte ouverte.