TD complémentaire LOGIQUE – 1

Exercice 1

Les propositions P, Q et R sont définies de la manière suivante :

- P : j'ai soif
- Q : mon verre est vide
- R : Il est 19h

Écrire chacune des propositions suivantes sous forme d'expression logique en utilisant les propositions P, Q, R, la négation, et les connecteurs binaires du cours.

a) J'ai soif et mon verre n'est pas vide	
b) Il est 19h et mon verre est vide, ou j'ai soif	
c) S'il est 19h alors j'ai soif	
d) Si j'ai soif et qu'il est 19h alors mon verre n'est pas vide	
e) Si mon verre est vide, alors il n'est pas 19h	
f) Soit mon verre est vide, soit il est 19h, mais pas les deux à la fois	

Exercice 2

a) Compléter la table suivante

P	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	P et $\mathcal{V}$	P ou $\mathcal{V}$	P et $\mathcal{F}$	P ou $\mathcal{F}$	$\overline{P \text{ ou } \mathcal{F}}$	$\overline{P}$ et $\mathcal{V}$
0	*1*	*0*						
1	*1*	*0*						

b) En déduire des équivalences entre propositions.

Exercice 3

Les propositions P et Q sont définies ainsi :

- P : L'année est un nombre pair
- Q : L'année est bissextile

Exprimer les propositions suivantes sous forme d'expressions logiques :

a) L'année est paire mais pas bissextile

b) Si l'année n'est pas paire, alors l'année n'est pas bissextile

Exercice 4

<table>
<tr>
<td>
Soit le morceau d'algorithme suivant :
Variables A, B, C, D, E : booléen
Variable X : entier
Début
Saisir (X)
$A \longleftarrow X > 12$
$B \longleftarrow X > 2$
$C \longleftarrow X < 6$
$D \longleftarrow (A \; et \; B) ou \; C$
$E \longleftarrow A \; et \; (B \; ou \; C)$
….
Fin
</td>
<td>
Remplir le tableau suivant avec les valeurs de vérité de A, B, C, D et E.

	A	B	C	D	E
$X = 1$					
$X = 3$					
$X = 8$					
$X = 14$					

Les expressions booléennes (propositions) D et E sont-elles équivalentes ?
</td>
</tr>
</table>

Exercice 5

<table>
<tr>
<td>
Soit le morceau d'algorithme suivant :

Saisir X
Si $X \leq 10$ et $X \geq 5$ alors
$Y = 2 \times X$
Sinon
$Y = 3 \times X$
Fin Si
Afficher (Y)
</td>
<td>
Ecrire un morceau d'algorithme équivalent en utilisant le contraire de l'expression booléenne contenue dans le « Si » et la loi de Morgan.
</td>
</tr>
</table>

Exercice 6

On rappelle qu'une année A est bissextile si elle est divisible par 400 ou si elle est divisible par 4 mais pas par 100.

On note :

P : « l'année est divisible par 400 ».

Q : « l'année est divisible par 4 ».

R : « l'année est divisible par 100 ».

1. Exprimer à l'aide des connecteurs logiques $\wedge$ et $\vee$ une condition C qui sera vraie pour une année A bissextile, et fausse sinon.
2. A l'aide de la loi de Morgan, exprimer la condition Non C.

Exercice 7

La variable $lettre$ prend ses valeurs dans l'ensemble des 26 lettres de notre alphabet.

Soit les deux prédicats suivants :

- $cons(lettre)$: $lettre$ est une consonne (par exemple $cons("c")$ est vrai)
- $voy(lettre)$: $lettre$ est une voyelle.

a) Donner les valeurs de vérité de $cons(lettre)$ et $voy(lettre)$ pour $lettre = "a"$ puis $lettre = "b"$.
b) Exprimer à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques les deux phrases suivantes :
   - Toute lettre de l'alphabet est une voyelle ou une consonne.
   - Les lettres sont toutes des consonnes ou toutes des voyelles.
c) Traduire en français les deux propositions suivantes, et préciser si elles sont vraies ou fausses.
   - $(\exists lettre\ cons(lettre)) \wedge (\exists lettre\ voy(lettre))$
   - $\exists lettre\ cons(lettre) \wedge voy(lettre)$

Que met en évidence la question c) ?

Exercice 8

Formaliser les propositions suivantes en utilisant les prédicats indiqués entre crochets, des connecteurs logiques, la négation et des quantificateurs : (on pourra supposer que la variable prend ses valeurs dans l'ensemble des élèves de la classe).

- Personne n'est parfait [$p(x)$: x est parfait]
- Les absents n'ont pas tous tort [$a(x)$: x est absent;$t(x)$: x a tort]

Exercice 9

A l'aide de quantificateurs, de connecteurs, et de la négation, écrire la négation des propositions suivantes, où p et q sont des prédicats quelconques

1) $\exists x\ p(x) \vee \overline{q(x)}$
2) $\forall x\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$
3) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[2;4]$, $\exists x \in [2;4]\ f(x) = 0$

Exercice 10

On se place dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. On considère les trois prédicats suivants pour $x \in \mathbb{N}$:

$p(x)$: x est un nombre pair.	$i(x)$: x est un nombre impair.	$r(x)$: x est divisible par 3

Par exemple, $p(8)$ est vraie.

1) Donner les valeurs de vérité des trois prédicats pour $x = 75$, puis pour $x = 76$.

2) A l'aide d'un quantificateur et des prédicats ci-dessus, écrire la phrase suivante en langage mathématique :

"Tout nombre entier naturel est un nombre pair ou un nombre impair."

3) Traduire en français les phrases suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ p(x) \wedge r(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{N},\ i(x) \Rightarrow r(x)$

4) On considère à nouveau les deux phrases de la question 3).

a) Écrire la négation mathématique la plus simple possible de la première phrase.

Trouver un exemple qui montre que la première phrase est vraie (et sa négation fausse !)

b) Donner un contre-exemple qui montre que la seconde phrase est fausse, et écrire la négation mathématique de cette dernière phrase.

Exercice 11

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, on donnera un contre-exemple, puis on modifiera les ensembles où habitent x et y pour que la phrase devienne vraie.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$
- $\forall x \in \mathbb{N}, x \neq x^2$
- $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}\ (x^2 = y^2) \Rightarrow (x = y)$

Exercice 12

On considère les trois propositions suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$
2) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, y = x^2$
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$

a) Écrire en français la signification de ces propositions mathématiques.

b) La proposition 1) est-elle vraie ? Si oui, pourquoi, sinon, que faut-il faire pour la rendre vraie ?

c) Laquelle des deux propositions 2) et 3) est-elle vraie ?