

Chapitre VI

Calcul Matriciel – Généralités et calcul de base

Contenus

- Égalité de deux matrices.
- Matrice nulle, matrice identité.
- Calcul matriciel élémentaire :
 - addition ;
 - multiplication par un nombre réel ;
 - multiplication.

Capacités

- Effectuer des calculs matriciels à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, y compris le calcul d'une puissance d'une matrice.
- Représenter puis traiter une situation simple à l'aide d'une écriture matricielle.

Table des matières

I. Généralités	2
II. Calcul matriciel élémentaire.....	2
II.1. Somme	2
II.2. Produit	3
II.3. Exercice d'application :.....	4
TD	5

I. Généralités

Une matrice A , à n lignes et p colonnes, est un tableau de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où $a_{i,j}$ désigne le nombre de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne. On peut noter plus simplement $A = (a_{i,j})$.

- Si $n=p$, on parle de matrice carrée d'ordre n .
- Si $n=1$, on parle de matrice ligne.
- Si $p=1$, on parle de matrice colonne.

Exemple :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad B = (7 \quad 3 \quad 1) \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A est une matrice carrée d'ordre 3. Si on note $A = (a_{i,j})$, alors $a_{2,1} = 4, a_{1,2} = 6$.

B est une matrice ligne et C une matrice colonne.

Pour que 2 matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ soient égales elles doivent être de même taille (même nombre de lignes et de colonnes) et avoir les mêmes éléments (i.e., pour tous i et j , $a_{i,j} = b_{i,j}$).

On appelle **matrice nulle** toute matrice dont les éléments sont **tous** nuls.

On appelle **matrice identité** d'ordre n , la matrice carrée d'ordre n , notée I_n et définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Calcul matriciel élémentaire

II.1. Somme

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, deux matrices à n lignes et p colonnes. La somme des matrices A et B est la matrice $C = (c_{i,j})$, à n lignes et p colonnes telle que pour tous i et j , on ait : $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

On peut noter : $C = A + B$.

Exemple :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+2 & 4-4 \\ 5-2 & 6+3 & -1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Propriété :

Si A est une matrice et O une matrice nulle de même taille, alors : $A + O = O + A = A$ (on dit qu'une matrice nulle est élément neutre pour l'addition matricielle).

Pour toutes matrices A , B et C de même taille, on a :

$A + B = B + A$ (commutativité) et $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ (associativité).

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

II.2. Produit

Le produit d'une matrice $A = (a_{i,j})$ à n lignes et p colonnes par un nombre réel k est la matrice $B = (b_{i,j})$ à deux matrices à n lignes et p colonnes telle que pour tous i et j on ait $b_{i,j} = k \times a_{i,j}$.

On note $B = kA$.

La matrice $-1A$ se note $-A$ et est appelée matrice opposée de A .

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ et $k = 2$,

alors $kA = 2A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times (-2) & 2 \times 4 \\ 2 \times 5 & 2 \times 6 & 2 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 10 & 12 & -2 \end{pmatrix}$.

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice à n lignes et p colonnes et $B = (b_{i,j})$, une matrice à p lignes et m colonnes. Le produit des matrices A et B est la matrice $C = (c_{i,j})$, à n lignes et m colonnes telle que pour tous i et j , on ait : $c_{i,j} = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \dots + a_{i,p} \times b_{p,j}$.

On peut noter : $C = A \times B = AB$.

Attention !!!

Pour pouvoir effectuer le produit de 2 matrices, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 6 + 0 \times 2 & 2 \times 3 + 0 \times 4 \\ 5 \times 6 + 3 \times 2 & 5 \times 3 + 3 \times 4 \\ 1 \times 6 + 2 \times 2 & 1 \times 3 + 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 36 & 27 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A \times B =$

Propriétés :

Si A , B et C sont deux matrices et k un nombre réel, on a les propriétés suivantes :

$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ que l'on peut noter $A \times B \times C$.

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.

$A \times (kB) = kA \times B$.

Si A est une matrice carrée, on note A^2, A^3, \dots, A^n pour $n \geq 2$, les matrices définies par $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A$, ...

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -18 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$.

II.3. Exercice d'application :

Une société informatique, ArthurInfo, possède deux magasins dont l'aménagement du parc informatique est le suivant :

- Magasin 1 : 12 PC, 5 tablettes, 10 mobiles.
- Magasin 2 : 17 PC, 6 tablettes, 14 mobiles.

On peut associer à cet équipement la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 17 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

La société ArthurInfo souhaite améliorer son équipement de la façon suivante :

- Magasin 1 : +3 PC, +2 tablettes, +2 mobiles.
- Magasin 2 : +5 PC, +3 tablettes, +4 mobiles.

Ce nouvel équipement peut être associé à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Quelle opération matricielle faut-il effectuer pour déterminer le nouvel aménagement du parc informatique des 2 magasins ?

Effectuer cette opération.

2. Pour acheter le nouvel équipement, la société ArthurInfo a le choix entre 2 fournisseurs dont les prix sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Fournisseur 1	Fournisseur 2
PC	600,00€	550,00€
Tablette	180,00€	200,00€
Mobile	60,00€	50,00€

On peut associer ces prix à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 600 & 550 \\ 180 & 200 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}$$

Quelle opération matricielle faut-il effectuer et avec quelles matrices ?

Effectuer cette opération et interpréter le résultat.

Exercice 1 :

On considère les matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, carrées d'ordre 3, définies par $a_{i,j} = i$ et $b_{i,j} = i - j$.

Écrire ces matrices sous formes de tableaux de nombres.

Exercice 2 :

On considère la matrices $A = (a_{i,j})$ à 3 lignes et 4 colonnes telle que $a_{i,j} = \text{Max}(i, j)$ et la matrice B à 2 lignes et 5 colonnes telle que $b_{i,j} = i \times j$.

Écrire ces matrices sous formes de tableaux de nombres.

Exercice 3 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A + B$ et $A - B$.
- Calculer $(A + B) + (A - B)$. Expliquer le résultat.

Exercice 4 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A + A$, $3A$ et $-10A$.
- Est-il possible de trouver un réel k tel que $kA = I_2$? (Justifier)

Exercice 5 :

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 8 & 100 \end{pmatrix}$. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n , tel que tous les éléments de $\frac{1}{n}A$ soient strictement inférieurs à 0,01.

Exercice 6 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

- Calculer $2A - B$ et $3A - 4B$.
- Déterminer les deux matrices C et D telles que $C + D = A$ et $C - D = B$.

Exercice 7 :

Un groupe pharmaceutique produit 3 types de médicaments M1, M2 et M3 dans chacun de ses 2 laboratoires L1 et L2. On associe la matrice A suivante à la production mensuelle (en millier) de ces médicaments dans chaque laboratoire.

$$A = \begin{pmatrix} 54 & 27 & 31 \\ 12 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Par exemple, le groupe produit chaque mois 12 000 médicaments du type M1 dans le laboratoire L2.

- Combien le laboratoire L1 produit-il de médicaments du type M3 par mois ?
- On peut obtenir, à partir d'une matrice colonne B, le nombre total de médicaments produits par chaque laboratoire en effectuant le calcul $A \times B$. De quelle matrice colonne s'agit-il ?

Exercice 8 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A \times B$ et $A \times (2B)$.
- Vérifier que $A \times (2B) = 2(A \times B)$.

Exercice 9 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A \times B$ et $A \times C$.
- Peut-on calculer $B \times A$ et $C \times A$? (Justifier)
- Calculer $B + C$ puis $A \times (B + C)$.
- Calculer $A \times (B + C) - A \times B - A \times C$. Expliquer le résultat.

Exercice 10 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Faire tous les produits possibles de deux matrices.

Exercice 11 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Faire tous les produits possibles de deux matrices.

Exercice 12 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$ et $B \times A$ et $A \times C \times B$.

Exercice 13 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 puis A^3 .
- Calculer B^2 puis B^3 .

Exercice 14 :

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Calculer B^2 puis B^3 .
- Montrer que $B^4 = 0$ (matrice nulle) puis que, pour tout $n \geq 3$, $B^n = 0$.

Exercice 15 :

Une usine fabrique 3 types de matériel électronique M1, M2 et M3 en assemblant des composants C1, C2 et C3 suivant la répartition du tableau ci-dessous :

	M1	M2	M3
Nombre de composants C1	2	7	3
Nombre de composants C2	0	2	6
Nombre de composants C3	3	5	2

Les masses unitaires des composants sont donnés par le tableau ci-dessous :

	C1	C2	C3
Masse unitaire en g	2	1	3
Prix unitaire en €	15	6	4

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 15 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

- Calculer $B \times A$ et interpréter ce que représente les lignes de la matrice obtenue.
- Le directeur de l'usine souhaite fabriquer en une journée 50 matériels M1, 70 matériels M2 et 60 matériels M3.

On pose $D = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Quelle opération matricielle permet d'obtenir le nombre de composants de chaque sorte permettant de réaliser les assemblages ? Effectuer l'opération puis donner la décomposition.

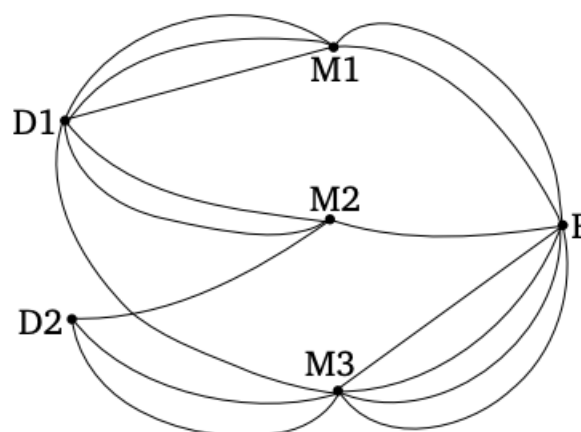
Exercice 16 :

On représente le nombre d'itinéraires reliant entre elles six grandes villes par le schéma ci-contre. De plus on reporte dans le tableau ci-dessous le nombre d'itinéraires des villes D1 et D2 vers les villes M1, M2 et M3 :

	M1	M2	M3
D1	3	2	1
D2	0	1	2

On associe ce tableau à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- En mimant ce qui est fait pour la matrice A, donner la matrice B correspondant aux itinéraires reliant les villes M1, M2 et M3 à la ville F.



Le tableau aura cette forme :

	D1	D2
M1		
M2		
M3		

2. Compter le nombre d'itinéraires distincts reliant D1 à F. Expliquer comment obtenir ce nombre à partir des coefficients des matrices A et B.

3. Faire de même pour le nombre d'itinéraires reliant D2 à F.

Exercice 17 : (Vers l'an prochain...)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$ et $B \times A$. Que remarquez-vous ?

Correction

Exercice 5 :

$$\frac{1}{n}A = \begin{pmatrix} \frac{10}{n} & \frac{20}{n} \\ \frac{8}{n} & \frac{100}{n} \end{pmatrix}$$

Le plus grand terme est $\frac{100}{n}$.

On veut $\frac{100}{n} < 0,01 \Leftrightarrow 100 < 0,01n \Leftrightarrow \frac{100}{0,01} < n \Leftrightarrow 10\,000 < n$.