Chapitre III

Éléments de la théorie des ensembles

Contenus

- Produit cartésien de deux ensembles :
  – définition ;
  – cardinal de E×F dans le cas où E et F sont finis.
- Relations binaires :
  – définition ;
  – propriétés ;
  – relations d'équivalence, relations d'ordre.
- Application f d'un ensemble E dans un ensemble F :
  – définition ;
  – image d'une partie A de E ;
  – image réciproque d'une partie B de F.
- Injection, surjection, bijection.
- Composition d'applications.

Capacités

- Déterminer et dénombrer les éléments du produit cartésien de deux ensembles finis.
- Traiter un exemple où les contraintes se traduisent en termes de relation d'ordre ou d'équivalence.
- Déterminer l'image ou l'image réciproque d'une partie finie par une application.
- Traiter un exemple où les contraintes se traduisent en termes d'injection, de surjection ou de bijection.
- Écrire une application sous forme de composée.
- Traiter un exemple de composition d'applications toutes deux soit injectives, soit surjectives, soit bijectives.

Table des matières

I. Langage ensembliste

I.1. Généralités

Un ensemble peut être défini en **extension** (on donne alors la liste de tous ses éléments) ou en **compréhension** (on donne alors une propriété caractéristique de ses éléments, formulée en français ou mathématiquement).

Exemples :
Certains ensembles portent des noms qui leur sont réservés : l'ensemble des entiers naturels est $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres réels est $\mathbb{R}$. L'ensemble vide se note $\emptyset$ ou $\{\}$.
Soit $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$. A est défini ici en extension.
Pour dire que 12 est un élément de A on écrit : $12 \in A$. On écrira aussi $7 \notin A$.
On peut aussi dire que A est la liste des multiples de 2 inférieurs ou égal à 12.
Et on peut aussi le noter ainsi mathématiquement : $A = \{2k, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 6\}$ ou encore : $A = \{2k, k \in [\![0; 6]\!]\}$.

Si un ensemble E a un nombre fini d'éléments, on appelle **cardinal de E** le nombre des éléments de E et on le note $card(E)$.

Exemples :
Dans l'exemple précédent, on a $card(A) = 7$.
$\mathbb{N}$ est un ensemble infini, il n'a donc pas de cardinal.
$card(\emptyset) = 0$.

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B, et on note $A \subset B$, quand tout éléments de A est aussi élément de B.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$$

Si $A \subset B$, on dit que A est un **sous-ensemble** de B ou une **partie** de B.
L'ensemble des parties d'un ensemble E se note $\mathcal{P}(E)$.
Quel que soit l'ensemble E, on a $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$.

Soit A un sous ensemble de E. On appelle **complémentaire** de A dans E, que l'on note $\mathcal{C}_E A$ ou $\bar{A}$, l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (x \in E \wedge x \notin A)$$

Exemples :
Dans $\mathbb{N}$, le complémentaire de l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs.
Dans $\mathbb{R}$, le complémentaire de l'ensemble $[3; +\infty[$ et $]-\infty; 3[$.

Soient A et B deux ensemble. L'**intersection** de A et de B, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

La **réunion** de A et de B, noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou non exclusif : l'élément peut appartenir à A et à B en même temps).

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

Exemples :
$A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ $\quad$ $B = \{0; 3; 6; 9; 12; 15\}$.
$A \cap B = \{0; 6; 12\}$ $\quad$ $A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 15\}$

I.2. Propriétés

Propriétés algébriques :

Quels que soient des ensemble A, B et C :

$A \cap B \Leftrightarrow B \cap A$	$A \cup B \Leftrightarrow B \cup A$	(Commutativité)
$A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cup C$	(Associativité)
$A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(Distributivité)

Soient A un sous-ensemble de E.

$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset \qquad A \cup \bar{A} = E$

Lois de Morgan

Soit F et G deux parties de E :

$\overline{F \cap G} = \bar{F} \cup \bar{G} \qquad \overline{F \cup G} = \bar{F} \cap \bar{G}$

II. Produit cartésien

Dans le tableau ci-dessous, les huit cases peuvent être repérées par un couple formé par le numéro de la ligne, suivi du numéro de la colonne. Ainsi, la case grisée est repérée par le couple (1; 3).

	1	2	3	4
1				
2				

On obtient ainsi les 8 couples : (1 ; 1), (1 ; 2), (1 ; 3), (1 ; 4), (2 ; 1), (2 ; 2), (2 ; 3), (2 ; 4).
Ces 8 couples sont tous ceux que l'on peut former en mettant un élément de l'ensemble $E = \{1; 2\}$ en première position et un élément de $F = \{1; 2; 3; 4\}$ en deuxième position.
L'ensemble de ces huit couples forment un ensemble appelé le **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$.

Remarque :

On aurait pu choisir de repérer chaque case par un couple formé par le numéro de la colonne, suivi du numéro de la ligne. On aurait obtenu alors 8 couples qui formeraient le produit cartésien de F et de E.
Ces produits cartésiens ne sont pas égaux bien qu'ils aient le même nombre d'éléments.

Exemple :

$(1; 3) \in E \times F$ mais $(1; 3) \notin F \times E$.

Définition

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et de F, que l'on note $E \times F$, est l'ensemble de tous les couples formés par un élément de E suivi d'un élément de F.

$$E \times F = \{(x; y), x \in E, y \in F\}$$

Si E et F sont des ensemble finis : $card(E \times F) = card(E) \times card(F)$.
Si $E = F$, on pourra noter $E^2 = E \times E$.
Au lieu d'écrire "$\forall\, x \in E, \forall\, y \in E$", on pourra écrire : "$\forall (x; y) \in E^2$".

On peut généraliser la notion de produit cartésien à plus de deux ensembles avec la définition suivantes :

$$E_1 \times E_2 \times \dots E_n = \{(x_1;\, x_2; \dots;\, x_n), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}$$

Ainsi : $card(E_1 \times E_2 \times \dots E_n) = card(E_1) \times card(E_2) \times \dots \times card(E_n)$.

III. Relations binaires

III.1. Introduction

On étudie l'implantation de trois PME informatique, que l'on notera a, b et c, dans quatre départements que l'on notera A, C, H et P. Notons E et F les ensemble {a, b, c} et {A, C, H, P}.
On peut décrire cette situation de plusieurs façons :

- Un tableau simple :

Nom de la PME	a	b	c
Département où elle est présente	A, P	H, P	C

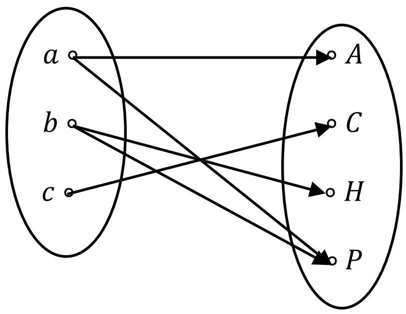
- Un tableau à double entrée :

	A	C	H	P
a	oui	non	non	oui
b	non	non	oui	oui
c	non	oui	non	non

- Une matrice : avec en ligne, les trois PME dans l'ordre a, b et c, et en colonne les quatre départements A, C, H et P. Un 0 signifie que la PME n'est pas implantée dans le département, un 1, qu'elle y est présente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Un diagramme sagittal :



- Une liste de couples : (a, A), (a, P), (b, H), (b, P) et (c, C) qui est une partie du produit cartésien $E \times F$.

Dans cet exemple, nous avons défini une relation « est présente dans le département » entre certains éléments de E (appelé ensemble de départ) et certains éléments de F (appelé ensemble d'arrivée). L'ensemble des couples en relation est appelé graphe de la relation.
Si on note $\mathcal{R}$ cette relation, on écrit alors $x \, \mathcal{R} \, y$ pour dire que la PME x est présente dans le département y. Par exemple $a \, \mathcal{R} \, P$.

III.2. Relation binaire sur un ensemble

Soit E un ensemble non vide. On peut définir une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E par la donnée de son graphe, qui est une partie du produit cartésien E^2. $(x\,;\,y)$ appartient au graphe si et seulement si $x\,\mathcal{R}\,y$, avec $(x\,;\,y) \in E^2$.
Une **relation binaire** entre deux ensembles E et F (ou simplement relation entre E et F) est définie par un sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$, soit une collection de couples dont la première composante est dans E et la seconde dans F.

Exemple :

- La relation de comparaison « inférieur ou égal » $\leq$ sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est une relation binaire.

Définition :

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E non vide :

- $\mathcal{R}$ est réflexive si et seulement si : $\forall x \in E, x\,\mathcal{R}\,x$.
- $\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si : $\forall\,(x;y) \in E^2, x\,\mathcal{R}\,y \iff y\,\mathcal{R}\,x$.
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si : $\forall\,(x;y) \in E^2, x\,\mathcal{R}\,y\ \ et\ y\,\mathcal{R}\,x \implies x = y$.
- $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si : $\forall\,(x;y;z) \in E^3, x\,\mathcal{R}\,y\ et\ y\,\mathcal{R}\,z \implies x\,\mathcal{R}\,z$.

Exemples :

La relation de comparaison « inférieur ou égal » $\leq$ sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est : réflexive, antisymétrique et transitive :

- Réflexive : $\forall x \in \mathbb{N}, x \leq x$.
- Antisymétrique : $\forall\,(x;y) \in \mathbb{N}^2, x \leq y\ \ et\ y \leq x \implies x = y$.
- Transitive : $\forall\,(x;y;z) \in \mathbb{N}^3, x \leq y\ et\ y \leq z \implies x \leq z$.

La relation « inférieur strictement) $<$ est transitive seulement.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E non vide. $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples :

Dans $\mathbb{N}$, la relation de congruence modulo n : $x \equiv y\ [n]$ est une relation d'équivalence :

- Réflexive : $\forall x \in \mathbb{N}, x \equiv x\ [n]$.
- Symétrique : $\forall\,(x;y) \in \mathbb{N}^2, x \equiv y\ [n] \iff y \equiv x\ [n]$.
- Transitive : $\forall\,(x;y;z) \in \mathbb{N}^3, x \equiv y\ [n]\ \ et\ y \equiv z\ [n] \implies \equiv z\ [n]$.

Dans $\mathbb{R}$, La relation de comparaison « inférieur ou égal » $\leq$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas symétrique.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E non vide. $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemples :

La relation de comparaison « inférieur ou égal » $\leq$ sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est une relation d'ordre car elle est réflexive, antisymétrique et transitive (voir plus haut).
L'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$ avec E un ensemble non vide (l'antisymétrie correspond à la définition de l'égalité entre parties via la double-inclusion).
La divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ ($\mathbb{N}$ privé de 0).
La congruence de modulo n sur $\mathbb{N}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique.

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est **totale** si l'on peut comparer tous les éléments de E

$$\forall\, x, y\ \in E, r\, \mathcal{R}\, y\ ou\ y\, \mathcal{R}\, x$$

Une relation d'ordre qui n'est pas totale est **partielle**.

Exemple :
La relation de comparaison « inférieur ou égal » $\leq$ sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est une relation d'ordre totale.
L'inclusion et la divisibilité sont des relations d'ordre partielles.

IV. Applications d'un ensemble dans un ensemble

IV.1. Définition, image et antécédent

Une application d'une ensemble E vers un ensemble F est une relation binaire de E vers F, qui a tout élément de E, associe un unique élément de F. On la note : $f: E \longrightarrow F$.

Définition :
Soit $f: E \longrightarrow F$ une application.

- L'image d'un élément $x \in E$ est l'élément $f(x) \in F$.
- L'image directe d'une partie $E' \subset E$ est la partie de F définie par
$$f(E') = \{f(x), x \in E'\},$$
c'est-à-dire l'ensemble des images des éléments de E'.

Exemple :
Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$. Alors, on obtient
$f(2) = 4$ $\qquad$ $f([0; 1]) = [0,1]$ $\qquad$ $f([-1; 1]) = [0,1]$

C'est-à-dire :

- L'image de 2 est 4.
- L'image directe de $[0; 1]$ est $[0; 1]$.
- L'image directe de $[-1; 1]$ est $[0; 1]$.

Définition :
Soit $f: E \longrightarrow F$ une application.

- Un antécédent d'un élément $y \in F$ est un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
- L'image réciproque d'une partie $F' \subset F$ est la partie de E définie par
$$f^{-1}(F') = \{x \in E, f(x) \in F'\},$$
c'est-à-dire l'ensemble de tous les antécédents des éléments de F'.

Remarque :
Un élément de E ne peut avoir qu'une et unique image, par contre, un élément de F peut ne pas avoir d'antécédent, ou une seul ou beaucoup plus !

Exemple :

Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$. Alors, on obtient
$f^{-1}(0) = 0$ $\qquad$ $f^{-1}([0; 4]) = [-2;\ 2]$ $\qquad$ $f^{-1}(1) = \{-1; 1\}$

0 a un antécédent qui est 0
L'image réciproque de $[0;4]$ est $[-2;\ 2]$.
Les antécédents de 1 sont -1 et 1.

Exemple global :

Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x+1 \end{cases}$.
Soit $A = \{0;4;5\}$. L'image directe de A est $f(A) = \{f(0); f(4); f(5)\} = \{1;13;16\}$.
Soit $A = [2\,;7]$.
$2 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 3 \times 2 \leq 3x \leq 3 \times 7 \Leftrightarrow 6 \leq 3x \leq 21 \Leftrightarrow 6+1 \leq 3x+1 \leq 21+1$
$\Leftrightarrow 7 \leq 3x+1 \leq 22 \Leftrightarrow 7 \leq f(x) \leq 22$. Donc $f(A) = [7;22]$

Soit $B = [10\,;16]$.
$10 \leq f(x) \leq 16 \Leftrightarrow 10 \leq 3x+1 \leq 16 \Leftrightarrow 10-1 \leq 3x+1-1 \leq 16-1 \Leftrightarrow 9 \leq 3x \leq 15$
$\Leftrightarrow \frac{9}{3} \leq \frac{3x}{3} \leq \frac{15}{3} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5$.
Donc $f^{-1}(B) = [3;5]$.

IV.2. Injection, surjection, bijection

Définitions :

- Une application $f: E \longrightarrow F$ est **injective** si tout élément $y \in F$ a au plus un antécédent $x \in E$
$$\forall (x,x') \in E^2, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$
Cela revient à dire que deux éléments distincts de E ont deux images distinctes.

- Une application $f: E \longrightarrow F$ est **surjective** si tout élément $y \in F$ a au moins un antécédent $x \in E$
$$\forall\, y \in F, \exists\, x \in E, f(x) = y$$

- Une application $f: E \longrightarrow F$ est **bijective** si tout élément $y \in F$ a exactement un antécédent $x \in E$.
En d'autres termes, f est bijective si, et seulement si, f est injective et surjective.

Conseils méthodologiques :

- Pour démontrer l'injectivité, on étudie l'équation $,f(x) = f(x')$, et dans le cas d'une application injective, on doit en déduire $x = x'$.
- Pour démontrer la surjectivité, on cherche si l'équation $y = f(x)$ admet une solution x.

Propriété :
Une application est bijective si, et seulement si, elle est inversible.

Donc pour qu'une application soit inversible, ce doit être une bijection

Exemples :
Les caractères injectifs, surjectifs et bijectifs dépendent des ensembles de départ et d'arrivée :

- $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ n'est ni injective, ni surjective.

……
……

………

- $f:\begin{cases}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2\end{cases}$ est surjective mais pas injective.

………
………
………

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2\end{cases}$ est injective mais pas surjective.

………
………
………

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2\end{cases}$ est injective et surjective, donc bijective.

………
………
………
………
………
………

Remarque :
En informatique, les injections et bijections ont un rôle important dans le codage d'informations : en effet, chaque « objet » doit avoir son propre code, car il est très souvent indispensable qu'un même code ne puisse pas être attribué à deux objets distincts.

IV.3. Composition d'applications

Définition :
Soit $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$ deux applications. La composée $g \circ f$ (g rond f) est l'application de E dans G qui associe, à tout $x \in E$, l'élément $g(f(x)) \in G$.

Exemple :
Soient f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et g l'application de de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 0{,}5x + 4$.
L'image de 3 par la composée de f par g est :

$$g \circ f(3) = g\big(f(3)\big) = g(3^2) = g(9) = 0{,}5 \times 9 + 4 = 8{,}5$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(x^2\big) = 0{,}5x^2 + 4$$

Remarque :
En général, on ne peut pas permuter les applications, ou en d'autres termes, la composition n'est pas commutative.
Pour l'exemple précédent, nous avons vu que $g \circ f(x) = 0{,}5x^2 + 4$
Et on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(0{,}5x + 4) = (0{,}5x + 4)^2 = (0{,}5x)^2 + 2 \times 0{,}5x \times 4 + 4^2$
$$= 0{,}25x^2 + 4x + 16 \neq 0{,}5x^2 + 4$$

Propriété :
La composée de deux applications injectives (respectivement surjectives ou bijectives) est injective (respectivement surjective ou bijective).

IV.4. Bijection réciproque

Considérons f de $E = \{1; 2; 3\}$ dans $F = \{a; b; c\}$ définie par : $f(1) = a; f(2) = c; f(3) = b$.
C'est une bijection car chaque élément de E a une seule image (donc f est une application), et chaque élément de F a un seul antécédent.
On peut alors définir une **bijection réciproque** de f, de F dans E, que l'on note f^{-1}, telle que :

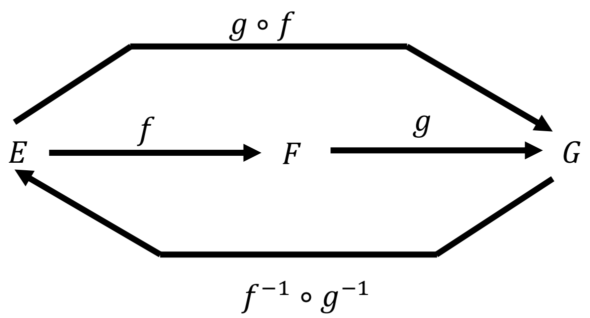
$$f^{-1}(a) = 1;\ f^{-1}(c) = 2;\ f^{-1}(b) = 3$$

Cette application f^{-1} est aussi une bijection.

Soit f une bijection de E dans F. Il existe une **bijection réciproque** de F dans E, notée f^{-1} telle que :

$$\forall (x; y) \in E \times F, f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Propriété :
Soient f une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G.
Alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G qui possède une **bijection réciproque** $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



TD

Exercice 1 :
Donner en extension l'ensemble A des multiples de 3 compris entre 20 et 40. Définir A en compréhension avec une formule mathématique.

Exercice 2 :
Soit $A = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$. Définir A en compréhension avec une phrase, puis avec une formule mathématique.

Exercice 3 :
Soit A l'ensemble des multiples de 7 compris entre 100 et 1 000. Quel est le cardinal de A ?

Exercice 4 :
Donner en extension l'ensemble A des valeurs affichées par cet algorithme :

Variables : I, J (entiers)
Début
    Pour I de 1 à 3 Faire
        Pour J de 0 à 2 Faire
            Afficher 10 I + J
        FinPour
    FinPour
Fin

Exercice 5 :
Donner en extension l'ensemble A des valeurs affichées par cet algorithme :

Variables : I, J (entiers)
Début
    Pour I de 1 à 3 Faire
        Pour J de 0 à 2 Faire
            Afficher I × J
        FinPour
    FinPour
Fin

Exercice 6 :
On considère les ensembles suivants : $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{2; 4; 6\}$ et $C = \{1; 3; 6\}$.

a. Déterminer $A \cap B, A \cap C, B \cap C$.
b. Déterminer $A \cup B, A \cup C, B \cup C$.
c. Déterminer $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E. Déterminer ensuite $\bar{B}$ et $\bar{C}$.

Exercice 7 :

$A = \{1; 4; 5; 6; 8; 9\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 9\}$ et $C = \{1; 2; 4; 7; 10\}$.

a. Déterminer $B \cup C$ puis $A \cap (B \cup C)$.
b. Déterminer $A \cap B$, $A \cap C$ puis $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
c. Quelle propriété vient-on d'illustrer ?

Exercice 8 :
Soit $E = \{0; 1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 9 :
Soit $E = \{a; b; c\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 10 :
A et B étant deux parties d'un ensemble E, on définit l'ensemble $A\Delta B$, appelé différence symétrique de A et de B par : $A\Delta B = \{x \in E, x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$.

a. Montrer que $A\Delta B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.
b. Représenter $A\Delta B$ par un diagramme.
c. Faire la table de vérité de $A\Delta B$.
d. Dans l'ensemble des entiers naturels, on considère les ensembles suivants :
$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$ et $C = \{3; 4; 5; 8\}$.
Comparer les ensembles $A\Delta(B\Delta C)$ et $(A\Delta B)\Delta C$.
e. À l'aide d'une table de vérité montrer que, quels que soient les ensembles A , B et C, on a $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Exercice 11 :

On considère les ensembles $E = \{1; 2\}$ et $F = \{a; b; c\}$. Montrer que $E \times F$ et $F \times E$ ont le même cardinal mais que ce sont deux ensembles différents.

Exercice 12 :
A et B étant deux ensembles, on définit l'ensemble $A\backslash B$ (lire A moins B) et appelé différence de A et de B, comme étant l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

a. Écrire une définition de $A\backslash B$ à l'aide de symbole mathématiques. Faire la table de vérité de $A\backslash B$.
b. Soient $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$ et $C = \{3; 4; 5; 8\}$.
Déterminer $A\backslash B$ puis $(A\backslash B)\backslash C$. Déterminer $B\backslash C$ puis $A\backslash(B\backslash C)$.
Est-ce que $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\backslash C)$?
c. Déterminer $A\backslash(B \cap C)$ puis $(A\backslash B) \cap (A\backslash C)$.
d. À l'aide d'une table de vérité, montrer que, quels que soient les ensemble A, B et C, on a :

$$A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$$

Exercice 13 :

On dit que des parties non vides d'un ensemble E forment une partition de E lorsque leur réunion est égale à E et qu'elles sont deux à deux disjointes.
a. Soit $E = \{a; b; c; d; f; g\}$. Donner un exemple de partie de E en trois parties.
b. Soit $F = \{a; b; c; d\}$. Combien de partitions de F peut-on faire en deux parties ?

Pour chacun des exercices de **14** à **19**, étudier si la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, antisymétrique transitive. Vous préciserez si c'est une relation d'équivalence ou d'ordre (total ou partiel).

Exercice 14 :
Dans $\mathbb{R}$, $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x < y$.

Exercice 15 :
Dans $\mathbb{N}$, $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x \textit{ est un diviseur de } y$.

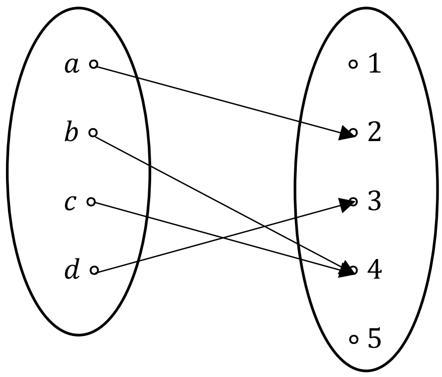
Exercice 16 :
Dans $\mathbb{N}$, $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x + y \textit{ est un diviseur de } 2$.

Exercice 17 :
Soit E un ensemble non vide. Dans $\mathcal{P}(E), A \,\mathcal{R}\, B \;\Leftrightarrow A \subset B$.

Exercice 18 :
Soit E un ensemble non vide. Dans $\mathcal{P}(E), A\,\mathcal{R}\,B \iff A \cap B = \emptyset$.

Exercice 19 :
Dans $\mathbb{R}^*$, $x\,\mathcal{R}\,y \iff xy \geq 0$.

Exercice 20 :
Soit f l'application de E dans F définie par le diagramme ci-dessous.
a. f est-elle injective ? surjective ?



b. Soient $A = \{a; b; c\}$ et $A' = \{c; d\}$. Déterminer $f(A)$ et $f(A')$.
c. Déterminer $f(E)$.
d. Soient $B = \{1; 2; 3\}$ et $B' = \{3; 4\}$. Déterminer $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(B')$.

Exercice 21 :
$E = \{a; b; c; d\}$, $F = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. f est l'application de E vers F telle que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 5$, $f(d) = 3$.
a. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
b. Quelle est l'image directe de $A = \{b; c; d\}$ par f ?
c. Quelle est l'image réciproque de $A = \{1; 2; 3\}$ par f ?

Exercice 22 :
$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $F = \{0; 1; 2; 3\}$. f est l'application de E vers F, qui à tout élément de E, associe son reste par la division par 3.
a. f est-elle une injection ? Une surjection ?
b. Soit $A = \{1; 3; 4\}$, déterminer $f^{-1}(f(A))$. Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$?
c. Soit $B = \{2; 3\}$, déterminer $f(f^{-1}(B))$. Est-ce que $f(f^{-1}(B)) = B$?

Exercice 23 :
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 4x + 10$.
a. f est-elle une injection ?
b. f est-elle une surjection ?
c. f est-elle une bijection ?
d. Déterminer l'image directe de $[2\,;\,3]$ et de $[0;\,+\infty[$.
e. Déterminer l'image réciproque de $[0;\,+\infty[$.

Exercice 24 :

$E = \{a; b; c; d\}$, $F = \{1; 2; 3\}$, $G = \{\alpha; \beta; \gamma\}$. On définit les applications de f de E dans F et g de F vers G de la façon suivante : $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 3$, $f(d) = 2$, $g(1) = \gamma$, $g(2) = \alpha$, $g(3) = \beta$.

a. Les applications f et g sont-elles des injections ? des surjections ? des bijections ?
b. Définir $g \circ f$.
c. Peut-on définir l'application réciproque de f ? de g ?

Exercice 25 :

$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On définit les applications f et g de E dans E de la façon suivante :

- $\forall x \in E, f(x)$ est le reste de la division euclidienne de $3x + 2$ par 7.
- $\forall x \in E, g(x)$ est le reste de la division euclidienne de $4x + 1$ par 7.

a. Remplir le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							
$g(x)$							
$g \circ f(x)$							

b. Expliquer pourquoi on peut définir les applications réciproque de f, de g et de $g \circ f$.
c. Que vaut $(g \circ f)^{-1}(6)$? Calculer $f^{-1} \circ g^{-1}(6)$. Le résultat était-il prévisible ?

Exercice 26 :

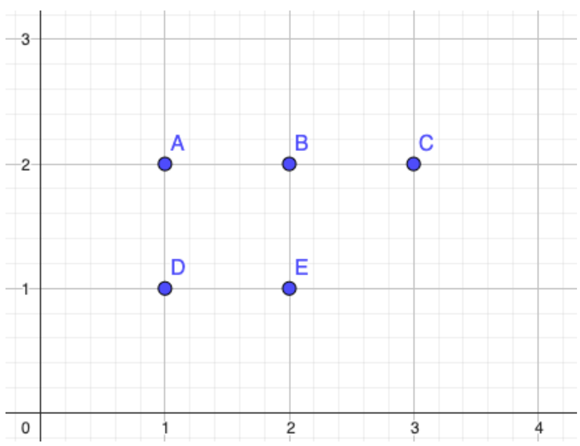
Soient f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 3x$ et $g(x) = 2x + 5$.
Définir les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 27 :

Soient f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x$ et $g(x) = x(x + 1)$.
Définir les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 28 :

Soit P le plan rapporté à un repère. Dans ce plan P, on considère l'application qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x + y; x - y)$.
a. Soit $\Omega = \{A; B; C; D; E\}$ l'ensemble des cinq points de la figure ci-dessous. Déterminer l'image de Ω.



b. Soit $F(4;3)$. Déterminer $f^{-1}(\{F\})$.
c. Montrer que, pour tout point M se trouvant sur l'axe des abscisses, son image M' se trouve sur une droite dont vous donnerez l'équation.

Exercice 29 :
On définit une application f de $E = \{-2;\ -1;0;1;2\}$ dans $F = \{0;1;2;3;4\}$ par $f(x) = x^2$. Dans E, on considère les parties $A = \{-2;\ -1;0\}$ et $A' = \{0;1\}$.
a. Est-ce que $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$?
b. Est-ce que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$?
c. Est-ce que $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$?

Exercice 30 :
On définit une application f de $E = \{-2;\ -1;0;1;2\}$ dans $F = \{0;1;2;3;4\}$ par $f(x) = x^2$. Dans E, on considère les parties $B = \{0;1;2\}$ et $B' = \{2;4\}$.
a. Est-ce que $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B)$?
b. Est-ce que $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$?
c. Est-ce que $f^{-1}(\bar{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$?

Exercice 31 :
Pour s'échanger des messages codés, Michaël et Élodie utilisent leur clavier téléphonique. Le chiffre 2 sert à coder les lettres A, B et C ; le chiffre 3 les lettres D, E et F, et ainsi de suite.
a. Quel nombre Élodie va-t-elle envoyer à Michaël pour lui dire BRAVO ?
b. Michaël est-il sûr de comprendre ?
c. Quelle propriété de l'application : $lettre \mapsto chiffre$ n'est pas respectée, qui permettrait de coder de façon certaine ?
d. Proposer une adaptation de la méthode permettant d'avoir un codage unique.

Exercice 32 :
a. Pour un certain type de codage, on a besoin de coder les lettres A, B, C, D.
On commence par attribuer un chiffre à chaque lettre : A=0, B=1, C=2, D=3.
Puis on multiplie par 2 et on ajoute 3. On cherche ensuite le reste par la division euclidienne par 4.
À ce reste correspond alors une lettre qui est la lettre cryptée.
Comment seront cryptées les lettres A, B, C, D ? Ce type de de codage est-il acceptable ?

b. La méthode précédente n'étant pas satisfaisante ;) , on décide de modifier le procédé. On multiplie par 3 le nombre et on ajoute 2. Et on cherche le reste par la division euclidienne par 4. Vérifier que ce codage est bijectif.

Exercice 33 :
À chaque lettre, à part le W que l'on fusionne avec le V, on attribue un nombre suivant le tableau ci-dessous. On code chaque lettre par un couple $(q;r)$, où q et r sont le quotient et le reste dans la division euclidienne par 5 du nombre associé à la lettre. Pour simplifier, on écrira le code sous forme d'un nombre à deux chiffres obtenus en concaténant les nombres q et r.

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
nbre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V,W	X	Y	Z	
nbre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	

a. Montrer que la lettre J est codée 14.
b. Comment se codera le mot BRAVO.
c. Montrer que ce codage est injectif.

Exercice 34 :

On note E l'ensemble des chaînes de caractères non vides. Par exemple, $'ee' \in E$, $'a' \in E$, $'qwerty' \in E$ mais $'' \notin E$.
Dans l'ensemble E, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x[0] == y[0]$.
Par exemple $'az' \mathcal{R}\, 'abc'$ mais on n'a pas $'zz' \mathcal{R}\, 'az'$.
1. Donner l'exemple d'un élément x de E distinct de $'sio'$ tel que $x \mathcal{R}\, 'sio'$.
2. a. $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? transitive ? (vous justifierez bien entendu vos réponses…)
b.
Que peut-on en déduire sur la relation binaire $\mathcal{R}$.

3. Soit f l'application de E dans E définie par $f(x) = x[0]$. Par exemple, $f('sio') = 's'$.
a. Donner un antécédent de $'a'$ par f.
b. Est-elle injective ?
c. Est-elle surjective ?