

Le Dobble
d'après Olympiade 2018

Nous souhaitons créer un jeu de cartes. Sur chaque carte seront représentés un certain nombre de symboles de manière que sur deux cartes quelconques figurent toujours un symbole commun et un seul.

Pour un jeu de trois cartes, on peut par exemple utiliser les symboles A, B et C, et les cartes AB, AC et BC.

Dans cet

exemple : 3 symboles ont été utilisés, il y a 2 symboles par carte et chaque symbole apparaît sur deux cartes.

L'ordre des symboles n'est pas pris en compte, ainsi AB et BA désignent la même carte.

Un jeu respectant les critères suivants sera dit « jeu valide » :

C1 : deux cartes quelconques disposent toujours d'un symbole commun et un seul

C2 : chaque symbole apparaît au moins deux fois dans le jeu

C3 : chaque symbole doit apparaître le même nombre de fois sur l'ensemble du jeu de cartes

C4 : le nombre de symboles par carte doit être le même pour toutes les cartes

C5 : une carte ne peut contenir deux fois le même symbole.

Nous noterons :

- s le nombre de symboles utilisés ; dans toute la suite, ces symboles seront notés A, B, C, D, ...
- u le nombre de cartes utilisant un symbole donné.
- p le nombre de symboles présents sur chaque carte .
- c le nombre de cartes dans le jeu.

I Découverte :

1. Les trois jeux suivants ne sont pas des jeux « valides ». Expliquer à chaque fois pourquoi :

Jeu 1 : ABD ; ACE ; BCF

Jeu 2 : ABC ; ADE ; BDF ; FAG ; GBE

Jeu 3 : ABC ; ABD ; DC

2. Peut-on fabriquer un « jeu valide » de quatre cartes avec seulement deux symboles par carte ?

3. Une carte du « jeu valide » ci-contre suivant a été égarée. Retrouver cette neuvième carte

CEFG	DIGK	AJGL
CHIJ	?	DHFL
ABCD	BKFJ	BEIL

II Le cas $u = 2$:

1. Compléter le jeu de trois cartes proposé en exemple, pour obtenir un jeu valide de quatre cartes avec $u=2$; $s = 6$ et $p = 3$:

Carte 1 : A B ...

Carte 2 : A C ...

Carte 3 : B C ...

Carte 4 :

2. Chaque symbole n'apparaissant que deux fois dans le jeu, proposer une expression du nombre c de cartes en fonction de p . Conjecturer également une expression de s en fonction de p .

3. Toujours dans le cas où $u = 2$, on suppose construit un jeu de n cartes.

Écrire un algorithme permettant de compléter ce jeu en un jeu de $n+1$ cartes.

On pourra écrire cet algorithme en français en utilisant l'instruction : « ajouter le symbole $n^{\circ}i$ à la carte $n^{\circ}j$ ».

III Le cas général : Dans cette partie, on considère un jeu valide de c cartes.

1. On recherche dans cette question des relations entre les nombres c , s , u et p .

- a) Exprimer de deux façons différentes le nombre de couples de cartes.
 - b) Exprimer de deux façons différentes le nombre total de symboles dessinés dans le jeu.
 - c) En déduire les deux formules suivantes : $c = p(u - 1)$ et $s = \frac{cp}{u}$.
2. Justifier qu'il n'existe pas de « jeu valide » de 8 cartes avec $u = 3$.
 3. Montrer que le triplet $(s, u, p) = (14, 6, 4)$ ne permet pas de construire un « jeu valide » de 21 cartes.
Que peut-on en conclure par rapport aux formules précédentes ?