# Nombre dérivé et tangente

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Les six premiers calculs reposent sur la définition du nombre dérivé. Les trois tangentes utilisent un nombre dérivé donné ou obtenu à la calculatrice.

## Calcul 1

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 2 \quad ; \quad a = -2$$

Pour h ≠ 0 :

$$f(-2) = 2 \times 4 - 6 - 2 = 0$$

$$f(-2+h) = 2(-2+h)^2 + 3(-2+h) - 2$$

$$f(-2+h) = 2(4 - 4h + h^2) - 6 + 3h - 2 = 2h^2 - 5h$$

$$\tau(h) = \frac{2h^2 - 5h - 0}{h} = \frac{h(2h-5)}{h} = 2h - 5$$

$$f'(-2) = lim_{h \to 0}(2h - 5) = -5$$

## Calcul 2

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1 \quad ; \quad a = -1$$

Pour h ≠ 0 :

$$f(-1) = -(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) + 1 = 5$$

$$f(-1+h) = -(-1+h)^3 + 2(-1+h)^2 - (-1+h) + 1$$

$$f(-1+h) = -(-1 + 3h - 3h^2 + h^3) + 2(1 - 2h + h^2) + 2 - h$$

$$f(-1+h) = 5 - 8h + 5h^2 - h^3$$

$$\tau(h) = \frac{5 - 8h + 5h^2 - h^3 - 5}{h} = \frac{h(-8 + 5h - h^2)}{h}$$

$$\tau(h) = -8 + 5h - h^2$$

$$f'(-1) = lim_{h \to 0}(-8 + 5h - h^2) = -8$$

# Fractions rationnelles

## Calcul 3

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad ; \quad a = -1$$

La fonction est définie pour x ≠ 1. On prend h ≠ 0 et h ≠ 2. Dans la dernière ligne, on fait tendre h vers 0.

$$f(-1) = \frac{-2+1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

$$f(-1+h) = \frac{-1+2h}{-2+h}$$

$$f(-1+h) - f(-1) = \frac{-1+2h}{-2+h} - \frac{1}{2}$$

$$f(-1+h) - f(-1) = \frac{2(-1+2h) - (-2+h)}{2(-2+h)}$$

$$f(-1+h) - f(-1) = \frac{-2+4h+2-h}{2(-2+h)} = \frac{3h}{2(-2+h)}$$

$$\tau(h) = \frac{3h}{2h(-2+h)} = \frac{3}{2(-2+h)}$$

$$f'(-1) = lim_{h\to 0}(\frac{3}{2(-2+h)}) = \frac{3}{2\times(-2)} = -\frac{3}{4}$$

## Calcul 4

$$f(x) = \frac{3}{2x+1} \quad ; \quad a = -2$$

La fonction est définie pour x ≠ −1/2. On prend h ≠ 0 et h ≠ 3/2, puis on fait tendre h vers 0.

$$f(-2) = \frac{3}{-4+1} = -1$$

$$f(-2+h) = \frac{3}{-3+2h}$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{3}{-3+2h} + 1$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{3+(-3+2h)}{-3+2h} = \frac{2h}{-3+2h}$$

$$\tau(h) = \frac{2h}{h(-3+2h)} = \frac{2}{-3+2h}$$

$$f'(-2) = lim_{h\to 0}(\frac{2}{-3+2h}) = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

# Racines carrées et expressions conjuguées

## Calcul 5

$$f(x) = 2\sqrt{x} + 1 \quad ; \quad a = 4$$

Domaine : x ≥ 0. On prend h ≥ −4 et h ≠ 0. On multiplie par l'expression conjuguée, puis on fait tendre h vers 0.

$$f(4) = 2\sqrt{4} + 1 = 5$$

$$f(4+h) = 2\sqrt{4+h} + 1$$

$$\tau(h) = \frac{2\sqrt{4+h} + 1 - 5}{h} = \frac{2(\sqrt{4+h} - 2)}{h}$$

$$\tau(h) = \frac{2(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)}$$

$$\tau(h) = \frac{2((4+h) - 4)}{h(\sqrt{4+h} + 2)}$$

$$\tau(h) = \frac{2h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{2}{\sqrt{4+h} + 2}$$

$$f'(4) = lim_{h\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt{4+h} + 2}\right) = \frac{2}{\sqrt{4} + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

## Calcul 6

$$f(x) = \sqrt{2x + 5} \quad ; \quad a = -2$$

Domaine : x ≥ −5/2. On prend h ≥ −1/2 et h ≠ 0. On utilise l'expression conjuguée, puis on fait tendre h vers 0.

$$f(-2) = \sqrt{-4 + 5} = 1$$

$$f(-2+h) = \sqrt{2(-2+h) + 5} = \sqrt{1 + 2h}$$

$$\tau(h) = \frac{\sqrt{1+2h} - 1}{h}$$

$$\tau(h) = \frac{(\sqrt{1+2h} - 1)(\sqrt{1+2h} + 1)}{h(\sqrt{1+2h} + 1)}$$

$$\tau(h) = \frac{(1+2h) - 1}{h(\sqrt{1+2h} + 1)} = \frac{2h}{h(\sqrt{1+2h} + 1)}$$

$$\tau(h) = \frac{2}{\sqrt{1+2h} + 1}$$

$$f'(-2) = lim_{h\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt{1+2h} + 1}\right) = \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1$$

# Équations des tangentes

Une tangente au point d'abscisse a passe par A(a ; f(a)) et a pour coefficient directeur f'(a).

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

## Tangente 1

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad ; \quad a = -1 \quad ; \quad f'(-1) = -5$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$$

$$y = -5(x - (-1)) + 6 = -5(x + 1) + 6$$

$$y = -5x - 5 + 6$$

$$y = -5x + 1$$

## Tangente 2

$$f(x) = x^3 - 2x + 1 \quad ; \quad a = 1$$

La fonction de calcul du nombre dérivé de la calculatrice, appliquée à f en 1, donne :

$$f'(1) = 1$$

$$f(1) = 1^3 - 2 \times 1 + 1 = 0$$

$$y = 1(x - 1) + 0 = x - 1$$

$$y = x - 1$$

## Tangente 3

$$f(x) = \frac{2}{x + 1} \quad ; \quad a = -2 \quad ; \quad f'(-2) = -2$$

$$f(-2) = \frac{2}{-2 + 1} = -2$$

$$y = -2(x - (-2)) - 2 = -2(x + 2) - 2$$

$$y = -2x - 4 - 2 = -2x - 6$$

$$y = -2x - 6$$