Chapitre I

Manipuler les nombres réels (2s)

Table des matières

I. Les entiers

On note ℕ l'ensemble des nombres <u>entiers naturels</u> : ℕ = {0 ;1 ;2 ;3 ;...} et ℤ l'ensemble des <u>entiers relatifs</u> : ℤ = {.... -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ....}.

Ex. : $4 \in \mathbb{N}$, $-2 \notin \mathbb{N}$, $-2 \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{Z}$, $0,33 \notin \mathbb{Z}$. (Rappel : ∈ signifie « appartient à »)

a. Multiples et diviseurs

Définition :
Soit *a* et *b* deux entiers. On dit que <u>*a* est un multiple de</u> *b* s'il existe un entier *k* tel que *a*=*kb*. On dit alors que <u>*b* est un diviseur de *a*</u>.

Ex. :
- 12 est un multiple de 4 car il existe un entier 3 tel que 12=4x3.
- 25 est un diviseur de 100 car il existe un entier 4 tel que 100=25x4.
- 13 n'est pas un multiple de 3 car il n'existe pas d'entier *k* tel que 13=3x*k*.

Propriété :
Soit *a* un entier. La somme de deux multiples de *a* est aussi un multiple de *a*.

Démonstration :
Soit a=7. Soit b et c des multiples de a. Donc il existe k et k' tel que b=7k et c= 7k'.
Alors, b + c = 7k +7k' = 7(k + k') = 7K avec K = k + k'.
K est un entier car il est la somme de deux entiers, donc b + c est un multiple de 7.
Ex. : 112,114, 115,116,117+125, 126 p 29

b. Nombres pairs et impairs

Définitions :
- Un <u>nombre pair</u> est un entier multiple de 2. Il peut donc s'écrire sous la forme 2*k*, avec *k* entier.
- Un <u>nombre impair</u> est un entier non multiple de 2. Il peut s'écrire sous la forme 2*k* + 1 avec *k* entier.

Propriétés :
<u>Si</u> un nombre est impair <u>alors</u> son carré est impair. (propriété directe)
<u>Si</u> le carré d'un nombre est pair <u>alors</u> ce nombre est pair. (propriété contraposée)

Démonstration :
Soit a un nombre impair. Il peut donc s'écrire sous la forme a = 2k+1 avec k entier.
$a^2 = (2k+1)^2 = ...$
Ex. : 121,122,123 P 29

c. Nombres premiers

Définition :
Un nombre <u>premier</u> est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs <u>distincts</u> dans ℕ (1 et lui-même).
Ex. :
- 0 n'est pas premier car il est divisible par tous les entiers (pour tout entier *a*, 0 = 0x*a*).
- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.
- Les premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13 , 17 , 19 ,...

Propriété :
Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier ou peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombre premier.

Ex. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Les facteurs premiers de 360 sont 2, 3 et 5.

Méthode :
Décomposer N=660 en produit de facteur premier.

Correction :
Ce que l'on cherche à faire:
A écrire 660 sous la forme $p_1 \times p_2 \times ...$ où p_1, p_2, ... sont des nombres premiers.

- *On regarde si 660 est divisible par 2 (le premier des nombres premiers), si c'est le cas, on effectue la division de 660 par 2. Puis on regarde si le quotient de 330 par 2 est aussi divisible par 2, et on poursuit jusqu'à ce que le quotient ne soit plus divisible par 2.*
- *On effectue la même chose avec 3 (2ème nombre premier) puis pour les autres nombres premiers jusqu'à obtenir un quotient égal à 1.*

660	2
330	2
165	3
55	5
11	11
1	

Donc, $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$.

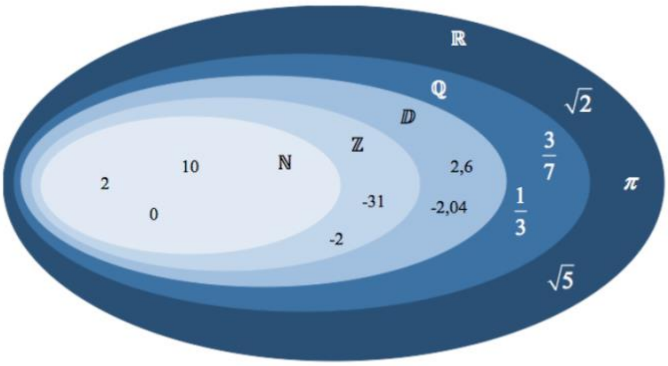
Ex. : 119,120, 124 p 29

II. Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Définitions :

- Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Cela veut dire qu'un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
  L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.
- Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul.
  L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé l'ensemble des nombres réels. On le note $\mathbb{R}$.
  C'est l'ensemble de tous les nombres que nous utiliserons en classe de seconde.

Remarque :
Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels comme $\sqrt{2}$ et π .
<u>Synthèse :</u>



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ($\subset$ signifie « inclus dans »)

Quelques notations :

- Un ensemble qui ne contient pas de nombre s'appelle l'**ensemble vide** et se note $\emptyset$.
- Le signe * exclu le nombre 0 d'un ensemble.
  Par exemple, $\mathbb{R}$ * est l'ensemble des nombres réels privé de 0.

*Démonstrations (voir le document : **COMPRENDRE LA DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE**):*

- *Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.*

Nous allons faire un raisonnement par l'absurde (supposer que la propriété contraire est vraie et montrer que nous aboutissons à une absurdité).
Soit la proposition P : $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.
Par définition il existe $a \in N$ et $n \in N$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. On a alors $10^n = 3a$.
10^n serait multiple de 3 ce qui est faux car la somme des chiffre de 10^n est 1 et non un multiple de 3.
Par contradiction P est fausse donc la négation de P est vraie.
Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

- *$\sqrt{2}$ est un irrationnel : exercice*

Exercice :

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est à dire qu'il s'écrit sous forme <u>irréductible</u> $\frac{p}{q}$, p et q étant des entiers naturels non nuls.
1. Justifiez que $p^2=2 \times q^2$. Que pouvez-vous dire sur la parité de p^2.

2. En utilisant une propriété du cours, que pouvez-vous dire de la parité de p.
Donc, p peut s'écrire sous forme : p = ... avec k un nombre entier.

3. En déduire que q est pair.

4. En déduire que vous aboutissez à une absurdité. Conclure.

Définition : Encadrement décimal d'un nombre à 10^{-n} près.

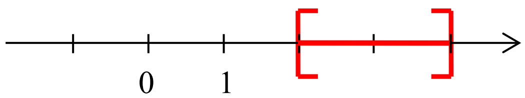
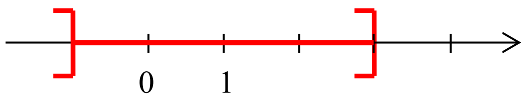
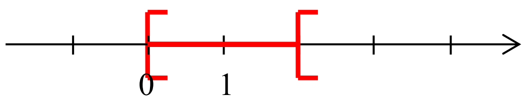
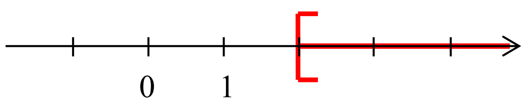
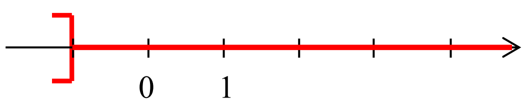
Donner un encadrement décimal d'un réel x, c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $a \leq x \leq b$.
$b - a$ est appelée amplitude de l'encadrement.
L'encadrement est à 10^{-n} près (n étant un entier) si son amplitude est égale à 10^{-n}.

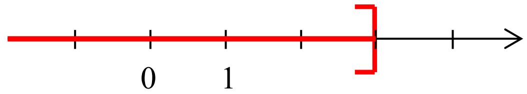
Ex. : $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$ est un encadrement à 10^{-2} près (à 0,01 près) de π.
Ex. : 2, 3, 4, 5 p 15

III. Intervalles de $\mathbb{R}$ et valeur absolue.

a. Intervalles de $\mathbb{R}$

Ex. :
L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note : [-2 ; 7].
On a par exemple :
$4 \in [-2 ; 7]$
$-1 \in [-2 ; 7]$
$8 \notin [-2 ; 7]$

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	[2 ; 4]	
$-1 < x \leq 3$	] -1 ; 3]	
$0 \leq x < 2$	[0 ; 2 [	
$x \geq 2$	[2 ; +∞ [∞ désigne l'infini	
$x > -1$	] -1 ; +∞ [	

$x \leq 3$	$]-\infty\,;3]$	

Remarque :
L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter $]-\infty\,;+\infty[$.

b. Distance de deux réels et valeur absolue d'un réel

Définition :
Le distance de deux réels a et b est la distance des points A et B (notée AB) d'abscisses respectives a et b sur la droite des réels.
Propriété :
La distance de a à b est égale à $a - b$ si $a \geq b$ et à $b - a$ si $a \leq b$. On la note $|a - b|$ qui se lit : valeur absolue de $a - b$.

Remarque : puisque AB = BA, on a $|a - b| = |b - a|$.

Définition :
La valeur absolue d'un réel x est la distance de ce réel à 0 sur la droite des réels. Elle est noté $|x|$.

- Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$.
- Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$.

Remarque : Pour tout réel x, $|x| \geq 0$.
Ex. :

- $|4| = 4$.
- $|-5{,}4| = 5{,}4$.

Propriété :
Si r est un réel strictement positif, alors pour tout réel x :

$$|x - a| \leq r \text{ signifie que } a - r \leq x \leq a + r \ (x \in [a - r; a + r]).$$

Ex. : 14, 15, 16, 17 p 17