Chapitre I
Séries statistiques à deux variables quantitatives

Contenus :

– moyenne arithmétique de deux nombres ;
– expression en fonction de n du terme de rang n ;
– somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ; notation **Σ**.
Suites géométriques à termes positifs :
– moyenne géométrique de deux nombres positifs ;
– expression en fonction de n du terme de rang n ;
– somme des n premiers termes d'une suite géométrique ; notation **Σ**.

Capacités attendues :

– Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
– Déterminer la raison d'une suite arithmétique ou géométrique modélisant une évolution.
– Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.
– Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.
– Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

Table des matières

I. Suites arithmétiques : moyenne arithmétiques, terme général et somme

Act. 1 p 8

1. Rappel

Définition :

Une suite numérique est une liste ordonnée et numérotée de nombres.

Généralement, elle est numérotée à partir de 0 ou de 1.

Les éléments de cette liste sont appelés les **termes**.

Le numéro de chaque terme est appelé son **indice** (généralement n).

Le **rang** d'un terme est sa place dans la liste.

Remarque :

Attention, le rang et l'indice ne sont pas forcément identique :

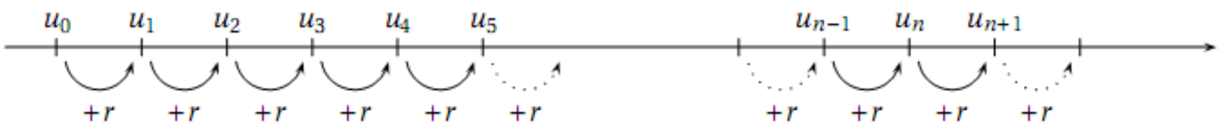
Si u est la liste {1 ; 3 ; -1 ; 4 ; ...} numérotée à partir de 0, on a donc $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = -1, \dots$

Ainsi, 3 est le terme d'indice 1 mais de rang 2 (c'est le 2ème terme dans la suite).

Donc méfiance quand une suite commence à 0...

Définition :

Une suite (u_n) est dite arithmétique lorsque chaque terme se déduit du précédent en ajoutant une constante réel r, appelée la raison, c'est-à-dire lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$



Ex. :

La suite 1 ;5 ;9 ;13 ;... est une suite arithmétique de raison 4.

Conséquences :

- Une suite arithmétique de raison r est strictement croissante si, et seulement si, r>0.
- Une suite arithmétique de raison r est strictement décroissante si, et seulement si, r<0.
- Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on calcule $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$, puis on montre que cette quantité est égale à une **constante indépendante de $\boldsymbol{n}$**. Cette constante sera alors la raison de la suite (u_n).

Méthode : *Comment montrer que l'on a affaire à une suite arithmétique et donner sa raison.*

Soit les 3 termes consécutifs d'une suite. Déterminer si il s'agit sont issus d'une suite arithmétique et en donner la raison si c'est le cas :

a = 23, b = 18 et c = 13.

Résolution :

On va calculer l'écart entre b et c puis entre c et b afin de voir si c'est le même. Si c'est le cas, notre suite est arithmétique et nous aurons la raison !

$$b - a = 18 - 23 = -5$$
$$c - b = 13 - 18 = -5$$

L'écart entre ces termes consécutifs est constant, c'est donc une suite arithmétique de raison -5.

2. Moyenne arithmétique

Définition :

Soit a et b deux nombres. La moyenne arithmétique (ou demi-somme) des deux nombres a et b est donné par la formule suivante : $\frac{a+b}{2}$

Exemple :

La moyenne arithmétique des nombres 2 et 15 est : $\frac{2+15}{2} = 8{,}5$.

3. Terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_0 (ou u_1). Alors pour tout entier naturel n, le terme général de la suite peut s'écrire :

$$\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r} \text{ ou } \boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1) \times r}$$

Conseil :

Faire attention si le premier terme est u_0 ou u_1 !

Exemple :

Soit la suite arithmétique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_1 = -7$.

Pour calculer u_{20}, on utilise la formule précédente :

$$u_{\mathbf{20}} = u_1 + (\mathbf{20} - 1) \times r = -7 + (\mathbf{20} - 1) \times 3 = 50$$

4. Somme des n premiers termes

Act.2 p 8

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante :

$$\text{nombre de terme} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Ainsi :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$u_1 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = n\,\frac{u_1 + u_n}{2}$$

Conseil :

Faire attention au premier terme (u_0 ou u_1) et au nombre de terme.

Méthode : Calculer la somme des n premiers termes

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et définie par la formule $u_n = 7 - 4n$.

Calculer la somme des 30 premiers termes.

Correction :
Si on veut calculer la somme des 30 premiers termes nous avons besoin de la valeur de u_0 *et de* u_{29} *(car* u_0*,* u_1*,* u_2*, …,* u_{29} *représentent 30 termes 😉).*
En utilisant la formule de l'énoncé, on trouve :

$$u_0 = 7 - 4 \times 0 = 7$$
$$u_{29} = 7 - 4 \times 29 = -109$$

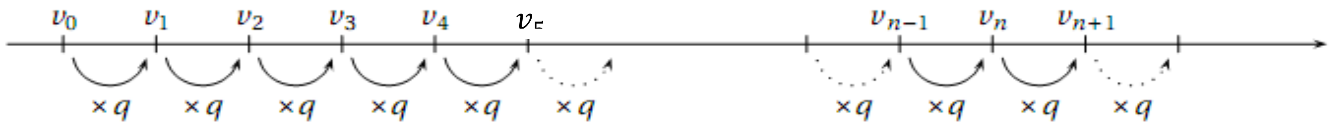
Ainsi : $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{29} = 30 \times \frac{7+(-109)}{2} = 1530.$

II. Suites géométriques : moyenne géométriques, terme général et somme

Act.3 p 12

1. Rappel

Définition :
Une suite (v_n) est dite géométrique lorsque chaque terme se déduit du précédent en multipliant par une constante réel q, appelée la raison, c'est-à-dire lorsque pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = q \times v_n$.



Ex. :
La suite 1 ;6 ;36 ;216 ;... est une suite géométrique de raison 6.

Conséquences :

- Une suite géométrique de raison $q>1$ est strictement croissante.
- Une suite géométrique de raison q avec $0<q<1$ est strictement décroissante.
- Pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, puis on montre que cette quantité est égale à une **constante indépendante de n**. Cette constante sera alors la raison de la suite (v_n).

Méthode : *Comment montrer que l'on a affaire à une suite géométrique et donner sa raison.*

Soit les 3 termes consécutifs d'une suite. Déterminer s'il s'agit sont issus d'une suite géométrique et en donner la raison si c'est le cas :
$a = 15$*,* $b = 5$ *et* $c = \frac{5}{3}$.

Résolution :
On va calculer le quotient $\frac{b}{a}$ *puis* $\frac{c}{b}$*. Si ce rapport est constant, c'est une suite géométrique et on aura sa raison !*

$$\frac{b}{a} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3}$$

Le quotient est constant, il s'agit de termes issus d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

2. Moyenne géométrique

Définition :

Soit a et b deux nombres. La moyenne géométrique des deux nombres a et b est donné par la formule suivante : $\boldsymbol{\sqrt{a \times b}}$

Remarque :

La moyenne géométrique est un instrument permettant de calculer des taux moyens.

Exemple :

Si le prix d'un produit augmente de 10% puis de 25%, les coefficients multiplicateurs sont respectivement de 1,1 et 1,25.

La moyenne géométrique de ces 2 nombres est : $\sqrt{1,1 \times 1,25} = \sqrt{1,375} \approx 1,1726$.

Soit le coefficient multiplicateur d'une hausse de 17,26%. L'augmentation moyenne est donc de 17,26%

3. Terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison q, de premier terme v_0 (ou v_1). Alors pour tout entier naturel n, le terme général de la suite peut s'écrire :

$$\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n} \text{ ou } \boldsymbol{v_n = v_1 \times q^{n-1}}$$

Exemple :

Soit la suite géométique (v_n) de raison 3 et de premier terme $u_1 = -7$.

Pour calculer v_{20}, on utilise la formule précédente :

$$v_{20} = v_1 \times q^{20-1} = -7 \times 3^{20-1} = -8\,135\,830\,268$$

4. Somme des n premiers termes

Act.4 p 12

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est donnée par la formule suivante :

$$1^{er} terme \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Conseil :

Attention, dans la formule, n représente le nombre de terme !!!

Méthode : Somme des n premiers termes

Soit la suite géométrique (v_n) *de premier terme* $v_0 = \frac{1}{3}$ *et de raison 3. Déterminez*

$$S_9 = \sum_{k=0}^{9} u_k.$$

Correction :

Le premier terme est $v_0 = \frac{1}{3}$. *Cette somme comporte 10 termes (car elle commence à k=0 et finit à k=9).*

On a donc : $S_9 = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{3} \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{29\,524}{3} \approx 9841,3$.