Chapitre III
Fonction inverse

Contenus
– Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition.
– Dérivée et sens de variation.
– Courbe représentative ; asymptotes.

Capacités attendues
– Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.

Table des matières

I. Rappel

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, la fonction dérivée est notée *f'*.
Le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a est le nombre *f'(a)*.

Les dérivées à savoir :

Fonction	fonction	Fonction dérivée : $f'(x)$
Constante	$f(x) = k$	0
Identité	x	1
Carré	x^2	$2x$
Cube	x^3	$3x^2$
Puissance	x^n	nx^{n-1}

Propriétés :
Soit f une fonction dérivables sur un intervalle I.

- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

II. Dérivée et sens de variation de la fonction inverse

Act. 2 p 78

Théorème :
La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}$ privé de 0) par $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. La fonction inverse est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	‖	$-$
variations de f	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

III. Courbe représentative et comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

Act. 1 p 78

III.1. En l'infini

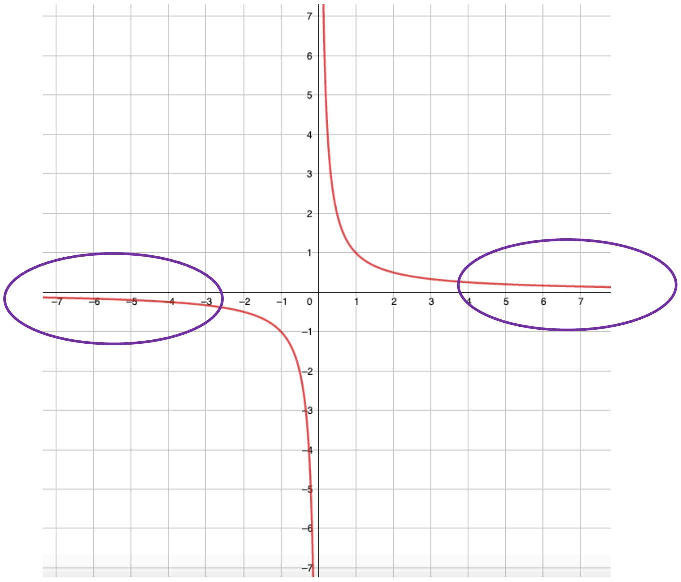
Propriétés :

- Soit x un nombre réel strictement positif. Lorsque x devient suffisamment grand, $\frac{1}{x}$ devient proche de 0.

On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

- Soit x un nombre réel strictement négatif. Lorsque x devient suffisamment petit, $\frac{1}{x}$ devient proche de 0.
  On note alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Conséquence graphique :
En $-\infty$ et en $+\infty$, l'hyperbole (courbe représentative de la fonction inverse) se rapproche de l'axe des abscisses.
On dit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à l'hyperbole en $-\infty$ et en $+\infty$.



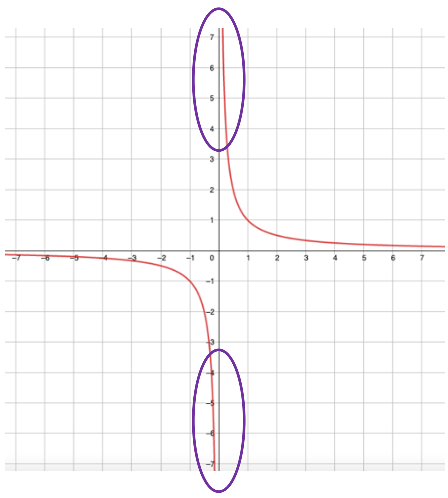
III.2. en 0

Propriétés :

- Soit x un nombre réel strictement positif. Lorsque x devient suffisamment proche de 0, $\frac{1}{x}$ devient proche de $+\infty$.
  On note alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

- Soit x un nombre réel strictement négatif. Lorsque x devient suffisamment proche de 0 par valeurs négative, $\frac{1}{x}$ devient proche de $-\infty$.
  On note alors : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Conséquence graphique :
En 0^- et en 0^+, l'hyperbole (courbe représentative de la fonction inverse) se rapproche de l'axe des ordonnées.
On dit que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à l'hyperbole en 0^- et en 0^+.



IV. Exercice type de synthèse

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1 ;10] par : $f(x) = x - 6 + \frac{4}{x}$.

1. Calculer la dérivée *f'* de *f* et montrer que, pour tout *x* de [1 ;10], $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.
2. Déterminez le signe de *f'(x)* sur [1 ;10] et donner le tableau de variation de *f*.

Correction :

1. $f(x) = x - 6 + \frac{4}{x}$ donc $f'(x) = 1 + 0 - 4 \times \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.

2.
Pour tout x de l'intervalle [1 ;10], $x + 2 > 0$ et $x^2 > 0$.
Donc, *f'(x) est du signe de* $x - 2$.

Étude du signe de $x - 2$:

$$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

On a le tableau de signe et de variation suivant :

x	1		2		10
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4,4

On vérifie sur la calculatrice la justesse de notre tableau et on calcule les valeurs et 1, 2 et 10.

On rappelle que si a est un nombre, $(a \times x^n)' = a \times n \times x^{n-1}$.
Ainsi, $7x^3 = 7 \times 3x^2 = 21x^2$