

Chapitre IV

Probabilités conditionnelles

Contenus

- Conditionnement par un événement de probabilité non nulle.
- Indépendance de deux événements de probabilités non nulles.
- Formule des probabilités totales pour une partition de l'univers.

Capacités attendues

- Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée.
- Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles.
- Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant.
- Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités.
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

Table des matières

| | |
|--|----------|
| I. Probabilités conditionnelles | 2 |
| a. Probabilité conditionnelle de B sachant A..... | 2 |
| b. Tableau à double entrée | 2 |
| II. Arbres pondérés et probabilités totales | 3 |
| a. Arbres pondérés..... | 3 |
| b. Formules des probabilités totales | 4 |
| III. Probabilités et indépendance..... | 5 |

I. Probabilités conditionnelles

Act.1 p 130

a. Probabilité conditionnelle de B sachant A

Définition :

Soit A et B deux évènements de l'univers Ω , A étant de probabilité non nulle ($P(A) \neq 0$).

La probabilité que l'évènement B soit réalisé sachant que l'évènement A est réalisé, appelée probabilité conditionnelle de B sachant A, est le nombre $P_A(B)$, défini par $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Rappel : $A \cap B$ (intersection) est l'ensemble des issues appartenant à la fois à A et à B.

Exemple :

On lance un dé à 6 faces et on s'intéresse aux deux évènements suivants :

A : « le nombre obtenu est impair ».

B : « Le nombre obtenu est un multiple de 3 ».

Donc $A \cap B$ est l'évènement : « obtenir un nombre à la fois impair et multiple de 3 ». Il n'y a que 3.

On a $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Donc $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriété :

Soit deux évènements A et B tels que $P(A) \neq 0$. Alors :

$$0 \leq P_A(B) \leq 1 \text{ et } P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$

Rappel : \bar{B} est l'évènement contraire de B.

Propriété : Probabilité d'une intersection

Si $p(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Si $p(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Rappel :

Probabilité d'une union :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

b. Tableau à double entrée

Un tableau à double entrée permet de déterminer des probabilités conditionnelles. La probabilité de $A \cap B$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la ligne B.

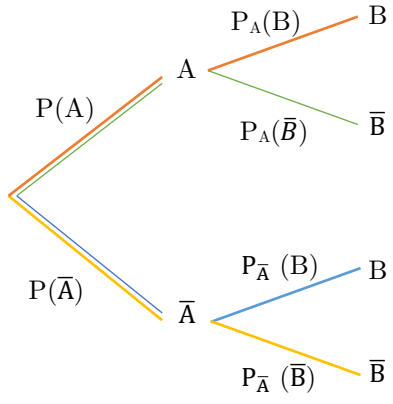
| | B | \bar{B} | Total |
|-----------|---------------------|---------------------------|--------------|
| A | $P(A \cap B)$ | $P(A \cap \bar{B})$ | $P(A)$ |
| \bar{A} | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A})$ |
| Total | $P(B)$ | $P(\bar{B})$ | 1 |

II. Arbres pondérés et probabilités totales

Act.2 p 130

a. Arbres pondérés

On peut modéliser une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers Ω par un arbre pondéré.

| 1 ^{er} niveau | 2 nd niveau | évènement | probabilité |
|---|------------------------|------------------------|--|
|  | A B | $A \cap B$ | $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ |
| | A \bar{B} | $A \cap \bar{B}$ | $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$ |
| | \bar{A} B | $\bar{A} \cap B$ | $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$ |
| | \bar{A} \bar{B} | $\bar{A} \cap \bar{B}$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$ |

Propriété : Règle du produit

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Propriété : Règle de la somme

La probabilité d'un évènement s'obtient en effectuant la somme des probabilités de tous les chemins menant à cet évènement.

Méthode : Construction d'un arbre pondéré et calcul de probabilité d'intersection

A l'issue d'une compétition, des cyclistes passent un contrôle anti-dopage.

On estime que 5% des cyclistes sont dopés. On sait aussi, avec le test utilisé, qu'un cycliste dopé est contrôlé positif dans 90% des cas, alors qu'un cycliste non dopé est contrôlé positif dans 8% des cas (faux positif).

On choisit au hasard un des cyclistes de la compétition que l'on soumet au test anti-dopage.

On considère les évènements :

D : « Le sportif choisi est dopé »,

T : « Le sportif choisi a un test positif »,

N : « Le sportif choisi a un test négatif ».

1. Décrire cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

2. En déduire la probabilité de choisir un sportif dopé ayant un test négatif.

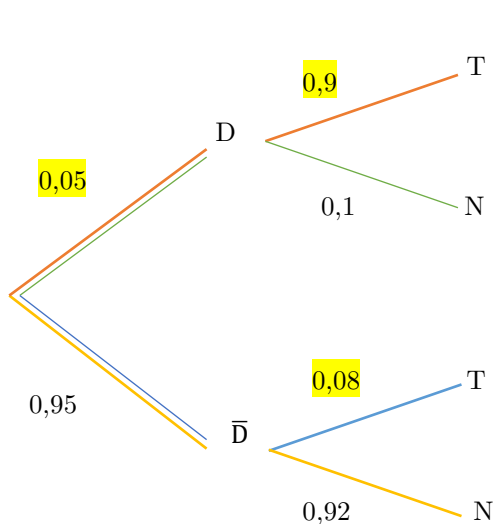
Correction :

1. La phrase « On estime que 5% des cyclistes sont dopés » donne la probabilité de l'évènement D soit $P(D)=0,05$.

On en déduit que $P(\bar{D})=1-P(D)=1-0,05=0,95$.

De la phrase « qu'un cycliste dopé est contrôlé positif dans 90% des cas », on en déduit $P_D(T)=0,9$.

De la phrase « qu'un cycliste non dopé est contrôlé positif dans 8% des cas », on en déduit $P_{\bar{D}}(T)=0,08$.



2. $P(D \cap N) = P(D) \times P_D(N) = 0,05 \times 0,1 = 0,005$. Soit 0,5% de chances de choisir un sportifs dopés qui aura un test positif.

b. Formules des probabilités totales

Act. 3 p 134

Définition : Partition de l'univers

Une partition de l'univers Ω est un ensemble d'évènements deux à deux incompatibles, et dont la réunion est Ω .

Rappel :

Deux évènements sont incompatibles si leur intersection est l'ensemble vide et donc la probabilité de leur intersection est nulle.

Propriété :

On considère A_1, A_2, \dots, A_n , n évènements de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω .

Pour tout évènement B, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

C'est-à-dire :

$$P(B) = P_B(A_1) \times P(B) + P_B(A_2) \times P(B) + \dots + P_B(A_n) \times P(B)$$

Cas particulier :

A et B étant 2 évènements, on a : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Méthode :

Soient A et B deux évènements.

On sait que $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,7$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,9$. Calculer $P(B)$.

Correction :

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}) = 0,7 \times 0,4 + 0,9 \times (1 - 0,4) = 0,82.$$

III. Probabilités et indépendance

Act. 4 p 134

Dans l'ensemble Ω des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B de probabilité non nulle. Si $P_A(B) = P(B)$, c'est-à-dire que si la réalisation ou non de l'évènement A ne modifie pas la probabilité de B, on dit que l'évènement B est indépendant de l'évènement A.

Propriétés :

- Soit deux évènements de probabilité non nulle. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (1) $P_A(B) = P(B)$;
 - (2) $P_B(A) = P(A)$;
 - (3) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Deux évènements A et B sont indépendants si, et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Méthode : Étudier l'indépendance de deux évènements

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

On considère les évènements suivants :

A : « la carte tirée est un carreau », B : « la carte tirée est un roi » et C : « la carte tirée est rouge ».

1. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
2. Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

Correction :

1. Le jeu contient 8 carreaux, quatre rois et seize cartes rouges. La carte étant tirée au hasard, on a :

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad P(C) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

$A \cap B$ est l'évènement : « la carte tirée est un roi de carreau ».

On a donc $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.

De plus, $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$. Ainsi on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Les évènements A et B sont indépendants.

2. $A \cap C$ est l'évènement : « la carte tirée est un carreau et une carte rouge ».

Donc : $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$.

D'autre part, $P(A) \times P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Ainsi, $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$.

Les évènements A et C ne sont pas indépendants.