Chapitre VII
Fonction logarithme décimale

Contenus
– Définition du logarithme décimal de b pour $b > 0$ comme l'unique solution de l'équation $10^x = b$; notation log.
– Sens de variation.
– Propriétés algébriques :
$log(ab) = log(a) + log(b)$, $log(an) = n\,log(a)$ et $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ pour n entier naturel, a et b réels strictement positifs.

Capacités attendues
– Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ d'inconnue x réelle, une inéquation du type $a^x < b$ ou $x^a < b$ d'inconnue x réelle ou du type $a^n < b$ d'inconnue n entier naturel.
– Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal pour transformer des expressions numériques ou littérales.

Table des matières

I. Fonction logarithme décimale

I.1. Définition du logarithme décimale

Définition :
Soit b un réel strictement positif. Il existe un unique nombre réel x tel que $10^x = b$.
Ce nombre est appelé logarithme décimal de b. Il est noté : $\log(b)$.

Exemple :

$$10^5 = 100\,000 \Leftrightarrow 5 = \log(100\,000) \qquad ou\ 10^x = 200 \Leftrightarrow x = \log(200) \approx 2{,}3$$

Définition :
On appelle fonction logarithme décimale la fonction qui à tout réel x strictement positif associe son logarithme décimale ($log(x)$), c'est-à-dire la fonction $x \longmapsto \log(x)$.

Remarques :

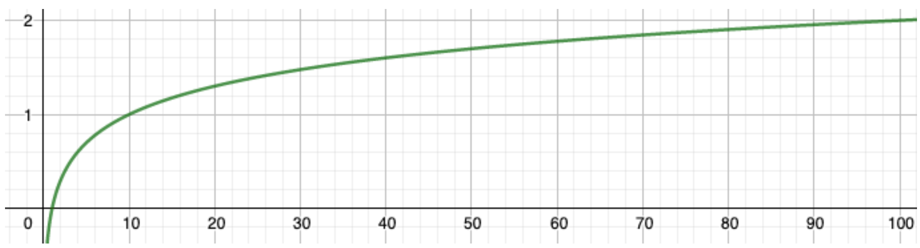
- *La fonction logarithme décimale est définie sur l'intervalle* $]0; +\infty[$.
- *Pour tout nombre réel a,* $log(10^a) = a$.

Exemple :
$\log(1\,000) = \log(10^3) = 3$, $\log(0{,}01) = \log(10^{-2}) = -2$.

Cas particuliers :
$\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$ et pour tout entier naturel $\log(10^n) = n$.

I.2. Sens de variation

Propriété :
La fonction log est croissante sur $]0; +\infty[$.



Conséquences :

$$0 < a \leq b \Leftrightarrow \log(a) \leq \log(b)$$

$$\text{Si } x \geq 1 \text{ alors, } \log(x) \geq 0 \text{ et si } 0 < x \leq 1 \text{ alors, } \log(x) \leq 0$$

II. Propriétés algébriques

Act.3 p 46

Propriétés :
Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tout réel x :

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$$

$$\log(a^x) = x \times \log(a)$$

Exemples :

$$log(200) = log(2 \times 100) = \log(2) \times \log(100)$$
$$\log\left(\frac{4}{5}\right) = \log(4) - \log(5)$$
$$\log\left(\frac{1}{3}\right) = -\log(3)$$
$$\log(6^x) = x \times \log(6)$$

III. Résolution des équations du type $a^x = b$ ou $x^a = b$

Nous allons utiliser principalement la propriété : $\log(a^x) = x \times \log(a)$.

Méthode : équation du type $a^x = b$
Résolution de l'équation $7^x = 8$:

$7^x = 8 \Leftrightarrow \log(7^x) = \log(8) \Leftrightarrow x \times \log(7) = \log(8) \Leftrightarrow x = \frac{\log(8)}{\log(7)} \approx 1{,}07$.

Méthode : équation du type $x^a = b$
Résolution de l'équation $x^7 = 4$:

$x^7 = 4 \Leftrightarrow \log(x^7) = \log(4) \Leftrightarrow 7 \times \log(x) = \log(4) \Leftrightarrow \log(x) = \frac{\log(4)}{7} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{\log(4)}{7}} \approx 1{,}22$.

IV. Résolution des inéquations du type $a^x < b$ ou $x^a < b$

Méthode : équation du type $a^x = b$
Résolution de l'équation $7^x < 8$:

$7^x < 8 \Leftrightarrow \log(7^x) < \log(8) \Leftrightarrow x \times \log(7) < \log(8) \Leftrightarrow x < \frac{\log(8)}{\log(7)} \Leftrightarrow x < 1{,}07$.

ATTENTION !!!😱
N'oubliez pas que si vous divisez par un nombre négatif une inéquation, alors il faut inverser le sens de celle-ci.
Or, pour tout $x < 1$, $log(x) < 0$.
Donc, si vous divisez par le logarithme décimal d'un nombre inférieur à 1, il faudra inverser le sens de l'inéquation.

Méthode : équation du type $x^a < b$
Résolution de l'équation $x^7 < 4$:

$x^7 < 4 \Leftrightarrow \log(x^7) < \log(4) \Leftrightarrow 7 \times \log(x) < \log(4) \Leftrightarrow \log(x) < \frac{\log(4)}{7} \Leftrightarrow x < 10^{\frac{\log(4)}{7}} \Leftrightarrow x < 1{,}22$.

😱Même remarque pour la division par un nombre négatif !!!!